

**SERGIO ALBERTO PECANKA**

**OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA E  
FORMA DE ESTRUTURAS  
ELÁSTICAS UTILIZANDO O  
MÉTODO *LEVEL SET***

**FLORIANÓPOLIS**

**2014**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA E FORMA DE  
ESTRUTURAS ELÁSTICAS UTILIZANDO O MÉTODO  
*LEVEL SET***

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

**SERGIO ALBERTO PECANKA**

Florianópolis, Fevereiro de 2014

## **Catálogo na fonte elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Santa Catarina**

Pecanka, Sergio Alberto

Otimização de topologia e forma de estruturas elásticas  
utilizando o método Level Set / Sergio Alberto Pecanka;  
orientador, Marcelo Krajnc Alves - Florianópolis, SC, 2013.  
146 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Otimização estrutural.  
3. Análise de sensibilidade. 4. Level Set. I. Alves,  
Marcelo Krajnc. II. Universidade Federal de Santa Catarina.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

# **OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA E FORMA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS UTILIZANDO O MÉTODO *LEVEL SET***

**SERGIO ALBERTO PECANKA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, Área de concentração Análise e Projeto Mecânico, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.  
Orientador

---

Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

---

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.  
Presidente

---

José Carlos de Carvalho Pereira, Dr.

---

Márcio Rodolfo Fernandes, Dr.

---

Lindaure Maria Steffens, Dra.



*“Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado.”*

Albert Einstein





## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Marcelo Krajnc Alves, pela sua excelente orientação, paciência e generosidade em compartilhar seus conhecimentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela concessão da bolsa de estudos durante dois anos.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade de estudos.

Aos professores Lindaura Maria Steffens, Márcio Rodolfo Fernandes e José Carlos de Carvalho Pereira, por terem gentilmente participado da banca examinadora.

Aos professores José Luiz Rosas Pinho e Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa, pelas cartas de recomendação e pelo apoio que me deram para iniciar o curso de mestrado.

Aos colegas Giovani Bresolin, Hélio Emmendoerfer Junior e Raúl Castellón pelos conselhos dados.



Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

## **OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA E FORMA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS UTILIZANDO O MÉTODO *LEVEL SET***

**Sergio Alberto Pecanka**

Fevereiro / 2014

Orientador: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Palavras-chave: método *level set*, otimização de forma e topológica, otimização estrutural, método de Galerkin livre de elementos.

O objetivo deste estudo é propor um procedimento para a otimização topológica e de forma de estruturas elásticas lineares utilizando o método *level set*. O problema de otimização consiste na minimização da *compliance* (flexibilidade) da estrutura sujeita a restrições volumétricas. A estrutura considerada está sujeita a um estado plano de tensões e restrita a pequenas deformações e deslocamentos. O material considerado é elástico linear e isotrópico. O procedimento proposto utiliza o método de Galerkin livre de elementos (EFGM) na solução da equação de estado e faz uso do método de Petrov-Galerkin na solução da equação de Hamilton-Jacobi, responsável pela evolução do *level set*, que é responsável pela definição final da forma e da topologia da estrutura. A função *level set* é então aproximada pelo método dos mínimos quadrados móveis (MLEM) que faz uso de funções de peso, tais como as splines quárticas, de modo a atingir um alto nível de precisão e suavidade. A implementação do procedimento foi através do desenvolvimento de um software em Fortran orientado a objeto contendo todas as rotinas necessárias à análise e à otimização da topologia e forma das estruturas contempladas. Para a validação do procedimento de otimização proposto e sua implementação, são analisados vários problemas típicos encontrados na literatura e comparados os seus resultados.



Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mechanical Engineering.

## **ELASTIC STRUCTURES TOPOLOGICAL AND SHAPE OPTIMIZATION USING LEVEL SET METHOD**

**Sergio Alberto Pecanka**

February / 2014

Advisor: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D..

Area of Concentration: Mechanical Analysis and Design.

Keywords: level set method, shape and topology optimization, structural optimization, element free Galerkin method.

The objective of this study is to present a procedure for linear elastic structures' shape and topology optimization using the level set method. The considered structure consists on minimization of structure compliance subject to volume restrictions, it is subject to plane stress state and limited to small displacements and deformations. The considered material is linear elastic and isotropic. The proposed procedure uses the element free Galerkin method (EEFGM) in the state equation solution and Petrov-Galerkin method to solve the Hamilton-Jacobi equation which is responsible for the evolution of level set. On the other hand, the evolution of level set is responsible for the final structure shape and topology definition. Then the level set function is approximate by using moving least square method (MLSM) with quartic splines weight functions to achieve a high level of accuracy and smoothness. The procedure implementation has been developed in Fortran object oriented software containing all the necessary analysis and optimization routines to analyze and optimize the shape and topology of the contemplated structures. In order to validate the proposed optimization procedure and its implementation some typical problems found in the literature have been analysed and their results have been compared.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Corpo sujeito a carregamentos prescritos . . . . .	13
4.1	Conjunto level set (SHU et al., 2011) . . . . .	44
4.2	Elemento finito Tri3 . . . . .	46
4.3	Elemento interceptado pelo contorno . . . . .	56
4.4	Interpolação na face [1] . . . . .	57
5.1	Fluxograma do algoritmo de otimização . . . . .	75
5.2	Exemplo 1 - Dimensões . . . . .	76
5.3	Exemplo 1 - Topologia inicial . . . . .	76
5.4	Exemplo 1 - Topologia final após 340 iterações . . . . .	77
5.5	Exemplo 2 Dimensões . . . . .	78
5.6	Exemplo 2 - Topologia inicial . . . . .	78
5.7	Exemplo 2 - Topologia final após 226 iterações . . . . .	79
5.8	Exemplo 3 - Dimensões . . . . .	79
5.9	Exemplo 3 - Topologia inicial . . . . .	80
5.10	Exemplo 3 - Topologia final após 318 iterações . . . . .	80
A.1	Pertubação de domínio induzido pelo mapeamento $T$ . . . . .	89
C.1	Função peso genérica . . . . .	118
C.2	Suporte da função peso . . . . .	119





## LISTA DE SÍMBOLOS

$\partial\Omega_\tau$	contorno de $\Omega$
$\varepsilon$	tensor deformação infinitesimal
$\mathbb{D}$	lei de Hook
$\bar{\mu}$	constante de Lamé
$\bar{\lambda}$	constante de Lamé
$\Omega$	domínio genérico
$\cup$	quantificador “união”
$\Gamma_D$	contorno com as condições de Dirichlet
$\Gamma_N$	contorno com as condições de Neumann
$\Gamma_0$	contorno com as condições de Neumann
$\vec{b}$	força de corpo
$\vec{t}$	tração prescrita de superfície
$\vec{u}$	campo de deslocamentos definido em $\Omega$
$div$	divergente
$\nabla$	gradiente
$\mathbf{V}_0$	conjunto dos deslocamentos admissíveis
$\mathbf{Var}_0$	conjunto das variações admissíveis
$\subset$	quantificador “contido”
$\cdot$	produto escalar
$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w})$	forma bilinear
$l(\Omega, \vec{w})$	forma linear
$\sigma$	tensor tensão
$\in$	quantificador “pertence”
$\mathbf{L}$	conjunto das transformações lineares $\mathbb{V}$ em $\mathbb{V}$
$\forall$	quantificador “qualquer que seja”
$\geq$	maior ou igual
$\mathbb{I}$	tensor identidade de quarta ordem
$I$	tensor identidade de segunda ordem
$\otimes$	produto tensorial
$\Phi$	densidade de deformação elástica por unidade de volume
$\vec{u}$	condição essencial prescrita
$\pi$	energia potencial total
$\tilde{L}$	funcional lagrangeano
$\vec{h}(\vec{u})$	função restrição
$J$	função objetivo
$D$	domínio de trabalho
$\emptyset$	conjunto vazio

$V_b$	volume delimitado
$\wp_{ad}$	conjunto de formas admissíveis
$\inf_{\Omega \in \wp_{ad}}$	ínfimo do conjunto de formas admissíveis
$\vec{n}$	vetor normal ao domínio genérico $\Omega$
$h(\phi)$	função Heaviside
$\delta(\phi(\vec{x}))$	função delta de Dirac definida em termos de distribuições
$\tau$	pseudotempo
$\partial\Omega$	contorno de $\Omega$
$\partial$	operador diferencial
$h_e$	tamanho do elemento
$span$	espaço gerado por
$\Phi^g$	matriz global das funções de forma
$E$	módulo de Young
$\bar{s}$	parâmetro comprimento de arco
$k_u$	número total de nós no contorno $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$
$\mathbf{K}_{u,u}^g$	matriz global de rigidez
$nle^N$	número total de segmentos de reta que formam o contorno $\Gamma_N$
$\{\vec{U}_{le}^\lambda\}$	componentes do multiplicador de Lagrange no segmento de reta
$nle^D$	número total de segmentos de reta que formam o contorno $\Gamma_D$
$det$	determinante da matriz
$tr$	traço da matriz
$\exists$	quantificador “existe”

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	Motivação e objetivo do trabalho .....	1
1.2	Metodologia .....	1
1.3	Revisão bibliográfica .....	2
1.4	Principais vantagens do método <i>level set</i> para otimização de forma .....	4
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL .....	7
2.1	Formulação forte do problema estrutural .....	7
2.2	Formulação fraca do problema estrutural .....	8
2.3	Dedução da formulação variacional do problema estrutural ..	9
2.3.1	Lei de Hooke generalizada .....	10
2.3.2	Definição da densidade de deformação elástica ..	11
2.3.3	Formulação do princípio de mínima energia potencial total .....	12
2.3.4	Formulação Variacional .....	14
2.3.5	Definição do problema de minimização .....	15
2.3.6	Determinação dos termos $D\tilde{\pi}(\vec{u})[\vec{w}]$ e $D\tilde{h}(\vec{u})[\vec{w}]$ ..	20
3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO .....	23
3.1	O problema de otimização .....	23
3.1.1	Formulação do problema <i>level set</i> .....	26
3.1.1.1	Problema de minimização com restrição de inequação .....	27
3.1.2	Análise de sensibilidade .....	28
3.2	Abordagem euleriana em otimização de forma .....	37
3.2.1	Dedução da equação Hamilton–Jacobi .....	37
3.2.2	Formulação do problema de Hamilton-Jacobi .....	40
4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO <i>LEVEL SET</i> .....	43
4.1	Solução com elementos finitos da equação Hamilton-Jacobi ..	44
4.1.1	Método <i>level set</i> baseado em elementos finitos ..	44
4.2	Equação de reinicialização .....	48
4.2.1	Introdução do termo de difusão .....	49
4.2.2	Dedução da forma fraca .....	50
4.2.3	Montagem do problema global não-linear .....	53

4.2.4	Tratamento do problema de perda de volume . . . . .	56
4.2.4.1	Definição da restrição . . . . .	56
4.2.4.2	Solução de um sistema de equações lineares com restrições . . . . .	58
4.3	Discretização da equação de estado usando o método de elementos livres de Galerkin . . . . .	60
4.4	Discretização espacial . . . . .	62
4.4.1	Dedução das equações discretas associadas com o problema modelo . . . . .	67
4.4.2	Determinação das integrais de linha . . . . .	71
5	RESULTADOS OBTIDOS NA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .	75
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	81
6.1	Conclusões . . . . .	81
6.2	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	81
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	82
	Apêndice A – Análise de sensibilidade em projeto com forma contínua .	89
A.1	Derivada material . . . . .	89
A.1.1	Mudança de domínio e velocidade de projeto . . . . .	89
A.1.1.1	Formula da integral de Hadamard . . . . .	95
A.1.2	Derivadas clássicas . . . . .	101
	Apêndice B – Tópicos de análise funcional . . . . .	105
B.1	Introdução aos operadores não lineares . . . . .	105
B.1.1	Operadores não lineares . . . . .	106
B.1.2	Operadores lineares . . . . .	106
B.1.3	Funcionais - $L(U, \mathbb{R})$ . . . . .	106
B.1.3.1	Funcionais fracamente contínuos . . . . .	108
B.1.4	Continuidade dos operadores lineares . . . . .	109
B.1.4.1	Teorema da representação de Riesz . . . . .	109
B.1.4.2	Espaços reflexivos de Banach . . . . .	109
B.1.4.3	Espaços de Lebesgue - $L_p(\Omega)$ . . . . .	110
B.1.4.4	Desigualdade de Holder . . . . .	110
B.1.4.5	Topologia fraca . . . . .	111
B.1.5	Espaço de distribuição . . . . .	111
B.1.5.1	Derivada das distribuições . . . . .	112
B.1.6	Diferenciação de operadores . . . . .	112

B.1.6.1	Diferencial fraco de Gâteaux . . . . .	113
B.1.6.2	Teorema 1 . . . . .	113
B.1.6.3	Diferenciação de Fréchet . . . . .	114
	Teorema 2 (diferencial de Fréchet) . . . . .	114
	Teorema 3 . . . . .	116
Apêndice C – Método dos mínimos quadrados móveis . . . . .		117
C.1	Interpolante dos mínimos quadrados móveis . . . . .	117
C.1.1	Construção de um conjunto de dados . . . . .	117
C.1.1.1	Determinação de $\vec{a}^*(\vec{x})$ . . . . .	119
C.1.2	Gradiente das funções de interpolação . . . . .	122



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação e objetivo do trabalho

Atualmente, a necessidade de descrever cada vez melhor o comportamento dos materiais vem se tornando essencial. Existem vários tipos e classes de materiais, com comportamentos os mais variados possíveis. Alguns possuem comportamento previsível; porém, existem outros com comportamentos bem mais complexos.

O objetivo deste trabalho é propor um procedimento para a otimização de topologia e forma de estruturas elásticas lineares para minimização da *compliance* (flexibilidade) com restrição de volume, utilizando a técnica numérica conhecida como método *Level Set*, capaz de simular e analisar movimentos de curvas em diferentes cenários físicos. Tal método, formulado por Osher e Sethian (OSHER; SETHIAN, 1988), apoia-se na ideia de representar uma determinada curva (ou superfície) como a curva de nível zero (zero *level set*) de uma função de maior dimensão (denominada função *Level Set*).

O procedimento proposto utiliza o método de Galerkin livre de elementos (EFGM) na solução da equação de estado e faz uso do método de Petrov-Galerkin na solução da equação diferencial do tipo Hamilton-Jacobi que descreve a evolução da função *Level Set*, que é responsável pela definição final da forma e da topologia da estrutura. A função *level set* é então aproximada pelo método dos mínimos quadrados móveis (MLEM) que faz uso de funções de peso, tais como as splines quárticas, de modo a atingir um alto nível de precisão e suavidade.

Por causa da eficácia e versatilidade do método *Level Set*, esta técnica numérica vem sendo amplamente aplicada em diversas áreas científicas, incluindo mecânica dos fluidos, processamento de imagens e visão computacional, crescimento de cristais, geometria computacional e ciência dos materiais.

## 1.2 Metodologia

A metodologia utilizada neste trabalho foi a seguinte:

- Estudo teórico da otimização de forma para minimização da *compliance* e do método *Level Set*;
- Desenvolvimento analítico das expressões necessárias para o cálculo da análise de sensibilidade;

- Implementação em software Fortran;
- Validação dos resultados, quando aplicável, com exemplos da literatura.

### 1.3 Revisão bibliográfica

Otimização pode ser definida como o processo de encontrar as condições que fornecem o valor máximo (ou mínimo) de uma função (RAO, 2009). Técnicas de otimização vêm sendo desenvolvidas desde meados dos anos quarenta, quando os comandos militares dos Estados Unidos e da Inglaterra estavam preocupados em resolver problemas complexos tais como construir comboios que pudessem evitar ou proteger uma carga de um ataque inimigo, ou como minimizar a massa de uma aeronave, de modo a otimizar o tempo de voo (ANDRÉASSON; EVGRAFOV; PATRIKSSON, 2005).

A otimização de forma de estruturas elásticas é um campo muito importante e popular. O método clássico de sensibilidade de forma (variação de contorno) tem sido muito estudado (CHENAIS, 1975), (MURAT; SIMON, 1976), (PIRONNEAU, 1984) e (SIMON, 1980). É um método muito geral que pode ser usado em qualquer tipo de função objetivo e modelos estruturais, mas possui duas desvantagens principais: o seu custo computacional (devido ao retrabalho na malha) e a sua tendência de falhar no mínimo local longe dos pontos globais. O método de homogenização (e suas variações, tais como materiais *power-law* ou método SIMP - *Solid Isotropic Material with Penalization*) (ALLAIRE; KOHN, 1993), (ALLAIRE et al., 1997), (BENDSOE, 1995), (ALLAIRE et al., 1997), é um método adequado para essas desvantagens, mas ele é restrito principalmente à elasticidade linear e à funções objetivos particulares (*compliance*, *eigenfrequency*, ou *compliant mechanism*).

Todavia, recentemente, um outro método surgiu em (BENDSOE; SIGMUND, 2003) baseado no método *level set*, que foi criado por (OSHER; SETHIAN, 1988) para rastrear a evolução de interfaces. O método *level set* é versátil e computacionalmente muito eficiente. Até agora, ele tem se mostrado uma ferramenta útil em muitos campos de estudo, tais como movimento pela curvatura principal, fluidomecânica, processamento de imagem, etc.

Neste trabalho será feita uma generalização destes dois trabalhos, em vários aspectos, propondo-se uma implementação sistemática de um método de otimização estrutural baseado no método *level set* onde a velocidade da frente do contorno da forma é derivada da análise de sensibilidade de forma, através da investigação de uma função objetivo, definida pela *compliance* (fle-



xibilidade), para projetos com cargas independentes e dependentes (cargas de pressão), em que a análise numérica é usada quando se resolve as equações de equilíbrio e o processo de atualização da função *level set* será realizada usando métodos de elementos finitos.

O foco será em otimização de forma e a abordagem do uso de “materiais substitutos” (*ersatz materials*) mais simples para preencher os vazios através de fase material fraca. Esta é uma abordagem bem conhecida em otimização topológica que pode ser rigorosamente justificada em alguns casos. Pode-se também considerar o caso de um modelo elástico não linear. Para todos os problemas desse tipo, deve-se calcular a derivada de forma através do uso de um problema adjunto.

A derivada de forma é usada como a velocidade normal da fronteira livre que é movida durante o processo de otimização. A frente de propagação é obtida com a solução aproximada de uma equação Hamilton–Jacobi para a função *level set*. Será feita uma investigação da convergência numérica em direção à forma e também da forte dependência da forma ótima com o projeto inicial.

Sethian e Wiegmann (2000) estão entre os primeiros pesquisadores que estenderam o método *level set* de Osher e Sethian para captura de contornos livres de restrições de uma estrutura em uma malha euleriana fixa, onde a tensão equivalente de Von Mises foi usada para melhorar a rigidez estrutural. Osher e Santosa (2001) investigaram otimização de duas fases de uma membrana modelada com equações diferenciais parciais escalares. O método *level set* foi combinado com uma estrutura de análise de sensibilidade, mas sem o contexto de elasticidade linear ou não linear. Wang et al. (2007) estabeleceram o vetor velocidade em termos da forma do contorno e da variação da sensibilidade como uma ligação significativa entre o processo geral de otimização e o poderoso método *level set*; foi mostrado que ao usar o método *level set* para otimização topológica estrutural, existe uma promissora potencial flexibilidade no manejo de mudanças topológicas, fidelidade de representação das restrições e grau de automação. O método *level set* também é desenvolvido como um conjunto natural, para combinar as variações rigorosas de forma com o processo convencional de otimização. Allaire et al. (1997) propuseram uma implementação similar do método *level set*, onde a velocidade frontal durante o processo de otimização é obtida da estrita análise de sensibilidade resolvendo-se um problema adjunto, e a velocidade da frente de propagação é obtida com a solução de uma equação Hamilton–Jacobi. Além disso, mudanças topológicas drásticas durante o processo de otimização são permitidas.

Diferentemente dos métodos convencionais *level set*, Belytschko, Xiao e Parimi (2003) desenvolveram um método de regularização de função implícita, no qual uma função *step* Heaviside é regularizada de modo a permitir a avaliação de sensibilidade. Entretanto, aproximações de baixa ordem, tais como funções de forma, de classe  $C^0$ , somente podem garantir que a função implícita pode ser contínua ao longo da malha, ao invés de suas derivadas parciais. Por este motivo, a malha deve ser suficientemente fina e, consequentemente, o custo computacional pode ser muito alto.

Recentemente, o método *level set* foi estendido para um método *level set* com abordagem em projetos de objetos heterogêneos usando modelos multifases (WANG; WANG, 2005), nos quais características promissoras tais como forte regularidade na formulação do problema, inerente capacidade geométrica e modelagem de materiais foram obtidas.

Na prática, ao aplicar o método *level set* em otimização estrutural topológica, deveria ser notado que a implementação de métodos convencionais discretos no método *level set* requer uma escolha apropriada de *upwind schemes*, velocidades de extensão e algoritmos de reinicialização. Em geral, equações diferenciais parciais raramente são fáceis de se implementar (MITCHELL, 2004), embora alguns *upwind schemes* robustos e precisos tem sido apresentados (OSHER; SETHIAN, 1988). Além disso, não existe mecanismo de nucleação no método *level set* convencional, se a equação Hamilton–Jacobi for resolvida sob estrita estabilidade numérica (SETHIAN, 1999) e (BURGER; HACKL; RING, 2004). De fato, novos vazios podem ser criados no interior da região com material porque a equação Hamilton–Jacobi satisfaz o princípio de maximização, e a reinicialização deve ser aplicada na função *level set* para garantir sua regularidade (BURGER; HACKL; RING, 2004) e (ALLAIRE; GOURNAY, 2004). Embora algumas tentativas foram feitas para incorporar as derivadas topológicas e derivadas de forma nos métodos *level set* para resolver este problema, mostrou-se difícil alternar entre derivadas topológicas e derivadas de forma (ALLAIRE; GOURNAY, 2004) e (WANG; WEI, 2005), bem como manipular funções de superfícies (BURGER, 2004). Consequentemente, as compensações numéricas do cálculo discreto têm limitado fortemente as vantagens originais dos métodos *level set* na otimização de forma.

## 1.4 Principais vantagens do método *level set* para otimização de forma

Alguns aspectos e vantagens deste método de representação de forma desconhecida de um sólido através da função *level set* são:

- (1) Modelos *level set* são topologicamente flexíveis. A função escalar

é definida de modo a sempre ter uma topologia simples; a representação não depende de nenhum tipo de parametrização explícita. A representação da forma é tão geral quanto permite a teoria física. Estes aspectos permitem que modelos com contorno facilmente mudem sua estrutura topológica enquanto estão sob processo de otimização que podem formar vazios, se dividam em múltiplos contornos, ou que se fundam com outros contornos em uma única superfície, em contraste com qualquer outro processo convencional de forma com contorno (SETHIAN, 1999).

(2) Uma vez que o contorno geométrico da forma é forçado a ser a *level set* zero na função *level set*, o deslocamento da *level set* na equação Hamilton-Jacobi somente é permitido ao longo da direção normal da função e *level set*, conduzido pela velocidade normal. Assim, a variação na forma geométrica somente acontece ao longo de sua direção normal. Da geometria diferencial, sabe-se (SAPIRO, 2001) que para um vetor velocidade genérico, sua componente tangencial não influencia a geometria da deformação da configuração do projeto; ela muda somente a parametrização. Entretanto, a equação *level set* não muda a parametrização da configuração sólida, a formulação *level set* é uma formulação livre de parametrização.

(3) Na teoria clássica de otimização, existe um importante conceito que é o de campo de velocidades de deformação de corpo (HAUG; CHOI; KOMKOV, 1986) e (SOKOLOWSKI; ZOLESIO, 1992). Baseado nas idéias de mecânica do contínuo, descobriu-se que configurações derivadas de uma perturbação oriunda de um difeomorfismo de um sólido existe somente na direção normal do contorno geométrico. O princípio subjacente na otimização de forma clássica é encontrar uma escolha adequada do campo de velocidades para garantir uma sequência convergente para a solução ótima. O modelo *level set* fornece um caminho natural para satisfazer esta exigência. É necessário forçar a função velocidade na equação *level set* para garantir a redução do funcional objetivo tal que seja necessário que a intensidade da velocidade normal seja nula em toda parte do contorno da configuração de projeto  $\partial\Omega_\tau$  em uma solução ótima.

(4) Além disso, um conjunto de técnicas numéricas tem sido desenvolvido (OSHER; FEDKIW, 2003) e (SETHIAN, 1999) para fazer com que o problema de valor inicial da equação Hamilton-Jacobi seja computacionalmente robusto e eficiente. De fato, no caso geral de uma estrutura sólida tridimensional, a complexidade computacional pode ser proporcional à área da superfície da estrutura ao invés de proporcional ao tamanho do seu volume. As soluções da equação diferencial parcial *level set* podem ser precisamente calculadas mesmo quando o contorno não é suave e quando singularidades

se desenvolvem nas derivadas clássicas (SAPIRO, 2001) e (SETHIAN, 1999). Esta propriedade robusta é determinada pela condição única de entropia da equação de convecção Hamilton-Jacobi. (OSHER; FEDKIW, 2003).

O próximo capítulo trata da definição do problema estrutural, necessária para a definição do problema estrutural.

## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Neste capítulo, formula-se o problema estrutural, define-se o problema de minimização e formula-se o princípio de mínima energia potencial total, que é obtida da formulação variacional do problema estrutural. A definição do problema de minimização será usada no próximo capítulo, que trata do problema de minimização da *compliance* (flexibilidade).

### 2.1 Formulação forte do problema estrutural

Considera-se neste trabalho estruturas lineares elásticas bidimensionais sujeitas a um estado plano de tensão. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto aberto limitado, ocupado por um material elástico isotrópico que segue a lei de Hooke  $\mathbb{D}$ . Lembrando que, para qualquer tensor simétrico  $\varepsilon$ ,  $\mathbb{D}$  é definido como

$$\sigma = \mathbb{D}\varepsilon = 2\bar{\mu}\varepsilon + \bar{\lambda}\text{tr}(\varepsilon)\mathbf{I} \quad (2.1)$$

em que  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\lambda}$  são as constantes de Lamé, do material. A fronteira de  $\Omega$  é formada por três partes disjuntas

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D \quad (2.2)$$

com condições de contorno de Dirichlet em  $\Gamma_D$ , e condições de contorno de Neumann em  $\Gamma_0 \cup \Gamma_N$ . As partes fronteiriças  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$  podem variar no processo de otimização, embora seja possível fixar algumas porções delas. Aqui, por simplicidade, somente  $\Gamma_0$  poderá variar, isto é, somente  $\Gamma_0$  será otimizada.

Denotando por  $\vec{b}$  a força de corpo por unidade de volume prescrito e por  $\vec{t}$  as trações prescritas de superfície, o campo de deslocamentos  $\vec{u}$  em  $\Omega$  é a solução do problema de elasticidade linearizado

$$\text{div}[\sigma(\vec{u})] + \vec{b} = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.3)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ em } \Gamma_D$$

$$\sigma(\vec{u})\vec{n} = 0 \text{ em } \Gamma_0$$

e

$$\sigma(\vec{u})\vec{n} = \vec{t} \text{ em } \Gamma_N$$

sendo  $\sigma = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u})$  o tensor tensão, em que

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\vec{x}} \vec{u} + [\nabla_{\vec{x}} \vec{u}]^T \right) \quad (2.4)$$

é a medida de deformação infinitesimal e  $\mathbb{D}$  é o tensor de elasticidade homogêneo isotrópico de quarta ordem.

## 2.2 Formulação fraca do problema estrutural

Para se obter a forma fraca associada ao problema, introduz-se o conjunto de deslocamentos admissíveis,  $\mathbf{V}_0$ , dado por

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d, \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.5)$$

e o conjunto das variações admissíveis,  $\mathbf{Var}_0$ , dado por

$$\mathbf{Var}_0 = \left\{ \vec{w} \mid \vec{w} \in H^1(\Omega)^d, \vec{w} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.6)$$

Por simplicidade, considera-se aqui a condição essencial  $\vec{u} = \vec{0}$ , cuja consequência é  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{Var}_0$ . De agora em diante, esses dois subespaços serão denotados por  $\mathbf{V}_0$ , ou seja,

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{Var}_0 \subset H^1(\Omega)^d. \quad (2.7)$$

Para se obter a forma fraca da equação de equilíbrio, considera-se

$$\int_{\Omega} \left\{ \operatorname{div} [\sigma(\vec{u})] + \vec{b} \right\} \cdot \vec{w} d\Omega = 0, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.8)$$

com

$$\sigma(\vec{u}) = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}).$$

Entretanto,

$$\operatorname{div}(\sigma^T \vec{w}) = \operatorname{div}(\sigma) \cdot \vec{w} + \nabla_{\vec{x}} \vec{w} \cdot \sigma \quad (2.9)$$

$$\sigma \cdot \nabla_{\vec{x}} \vec{w} = \sigma \cdot \frac{1}{2} \left( \nabla_{\vec{x}} \vec{w} + [\nabla_{\vec{x}} \vec{w}]^T \right) = \sigma \cdot \varepsilon(\vec{w})$$

e

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma^T \vec{w}) d\Omega = \int_{\Gamma_N \cup \Gamma_0} \sigma^T \vec{w} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_N \cup \Gamma_0} \vec{w} \cdot \sigma \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\vec{u})) \cdot \vec{w} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \vec{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Introduzindo-se (2.10) em (2.8), tem-se

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.11)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}).$$

Agora, definindo a forma bilinear  $a(\Omega, \vec{u}, \vec{w})$ , dada por

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega, \quad (2.12)$$

e a forma linear  $l(\Omega, \vec{w})$ , dada por

$$l(\Omega, \vec{w}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma, \quad (2.13)$$

pode-se formular a forma fraca como:

Determine  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  que é solução de

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = l(\Omega, \vec{w}), \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.14)$$

sendo

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{w}) d\Omega$$

e

$$l(\Omega, \vec{w}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{w} \cdot \vec{t} d\Gamma.$$

## 2.3 Dedução da formulação variacional do problema estrutural

Neste trabalho, por simplicidade será considerado somente princípios variacionais aplicados a materiais elásticos com carregamentos estáticos; assim, os problemas são restritos a deslocamentos e deformações infinitesimais e a resposta do material satisfaz a lei de Hooke generalizada, para elasticidade

linear. Além disso, será assumido que o material é isotrópico.

### 2.3.1 Lei de Hooke generalizada

As equações constitutivas para um material isotrópico linear elástico podem ser expressas, de acordo com a lei de Hooke, como

$$\sigma_{ij} = \mathbb{D}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

ou, em forma compacta, como

$$\sigma = \mathbb{D} \varepsilon. \quad (2.15)$$

O tensor de quarta ordem  $\mathbb{D}$  satisfaz as seguintes propriedades:

(i)  $\mathbb{D}$  é simétrico, isto é,

$$\mathbb{D}A \cdot B = A \cdot \mathbb{D}B \quad (2.16)$$

para quaisquer tensores simétricos de segunda ordem  $A$  e  $B$ , isto é,  $A$  e  $B \in \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}$  denotando o conjunto das transformações lineares de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{V}$ . Em componentes:

$$\mathbb{D}_{ijkl} A_{kl} B_{ij} = A_{kl} \mathbb{D}_{klij} B_{ij}, \forall A \text{ e } B \in \mathbf{L}$$

ou seja,

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \mathbb{D}_{klij} \quad (2.17)$$

(ii)  $\mathbb{D}$  é positiva definida, isto é,

$$\mathbb{D}A \cdot A \geq 0, \forall A \in \mathbf{L} \text{ e } \mathbb{D}A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0. \quad (2.18)$$

No caso de materiais isotrópicos, o tensor elasticidade de quarta ordem é dado por

$$\mathbb{D} = 2\bar{\mu}\mathbb{I} + \bar{\lambda} (I \otimes I) \quad (2.19)$$

em que  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\lambda}$  são as constantes de Lamé,  $I$  é o tensor identidade de segunda ordem, e  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem, restrito à classe dos tensores simétricos de segunda ordem. Em componentes,

$$\mathbb{D}_{ijkl} = 2\bar{\mu}\mathbb{I}_{ijkl} + \bar{\lambda} (I \otimes I)_{ijkl} \quad (2.20)$$



sendo

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2} \{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \}$$

e

$$(I \otimes I)_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

O tensor tensão para um material isotrópico linear elástico pode ser calculado como

$$\sigma = \mathbb{D}\varepsilon = [2\bar{\mu}\mathbb{I} + \bar{\lambda}(I \otimes I)] \varepsilon = 2\bar{\mu}\mathbb{I}\varepsilon + \bar{\lambda}(I \cdot \varepsilon)I = 2\bar{\mu}\varepsilon + \bar{\lambda}tr(\varepsilon)I. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Definição da densidade de deformação elástica

Pode-se definir a densidade de deformação elástica por unidade de volume,  $\Phi$ , como

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u})$$

isto é,

$$\Phi(\varepsilon(\vec{u})) = \frac{1}{2} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}). \quad (2.22)$$

Sejam  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\vec{\tilde{u}})$  e  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{u})$ . Expandindo-se  $\Phi(\tilde{\varepsilon})$  em série de Taylor em  $\varepsilon$ , tem-se

$$\Phi(\tilde{\varepsilon}) = \Phi(\varepsilon) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon} \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon} (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon). \quad (2.23)$$

Agora,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{D}_{ijrs} \varepsilon_{rs} = \sigma_{ij} \quad (2.24)$$

daí

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \{ \mathbb{D}_{ijrs} \varepsilon_{rs} \} = \mathbb{D}_{ijrs} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \mathbb{D}_{ijrs} \delta_{rk} \delta_{sl} = \mathbb{D}_{ijkl} \quad (2.25)$$

assim,

$$\Phi(\tilde{\varepsilon}) = \Phi(\varepsilon) + \sigma \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) + \frac{1}{2} \mathbb{D}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon). \quad (2.26)$$

Como  $\mathbb{D}$  é positiva definida, tem-se

$$\mathbb{D}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \geq 0 \quad (2.27)$$

que resulta em

$$\Phi(\tilde{\varepsilon}) \geq \Phi(\varepsilon) + \sigma \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \quad (2.28)$$

ou seja,

$$\sigma \in \partial\Phi(\varepsilon).$$

isto é,  $\sigma$  pertence ao conjunto dos subgradientes do potencial convexo  $\Phi(\varepsilon)$  em  $\varepsilon_0$ .

Entretanto, como

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (2.29)$$

a densidade de deformação elástica pode ser expressa como uma função do campo de deslocamento, isto é,

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \quad (2.30)$$

assim,

$$\Phi\left(\vec{\vec{u}}\right) \geq \Phi(\vec{u}) + \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon\left(\vec{\vec{u}} - \vec{u}\right) \quad (2.31)$$

sendo que a igualdade acontece no caso de

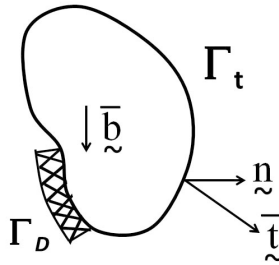
$$\vec{\vec{u}} = \vec{u}.$$

### 2.3.3 Formulação do princípio de mínima energia potencial total

Considera-se um corpo elástico, ilustrado na figura 2.1, ocupando o domínio  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $\Omega$  um conjunto aberto com contorno  $\Gamma$  e sujeito a um sistema de carregamentos prescritos definido por  $\vec{b}$  correspondendo a uma força prescrita de corpo, e  $\vec{t}$  correspondendo a uma tração de superfície. O contorno  $\Gamma$  é decomposto em  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_t$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_t = \emptyset$ . Aqui,  $\Gamma_D$  é a parte do contorno com condições essenciais prescritas,  $\vec{u} = \vec{\vec{u}}_D = \vec{0}$ , e  $\Gamma_t$  é a parte do contorno com condições naturais prescritas,  $\sigma \vec{n} = \vec{t}$ . Mais adiante se usará a decomposição de  $\Gamma_t$  como  $\Gamma_t = \Gamma_N \cup \Gamma_0$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_0 = \emptyset$ , onde

$$\sigma \vec{n} = \vec{t} \text{ em } \Gamma_N \text{ e } \sigma \vec{n} = 0 \text{ em } \Gamma_0. \quad (2.32)$$

Agora, de (2.14) pode-se formular o problema clássico de elasticidade linear como:

**Figura 2.1:** Corpo sujeito a carregamentos prescritos

Determine  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  tal que

$$\int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.33)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma, \quad \forall \vec{w} \in \mathbf{V}_0.$$

Observa-se, entretanto, que para qualquer  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  arbitrário, tem-se

$$\left( \vec{u} - \vec{u} \right) \in \mathbf{V}_0 \quad (2.34)$$

Consequentemente, substituindo-se (2.34) em (2.33), resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u} - \vec{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot (\vec{u} - \vec{u}) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot (\vec{u} - \vec{u}) d\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo

$$\sigma(\vec{u}) = \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}).$$

Assim, das propriedades da densidade da deformação elástica (2.31),

tem-se

$$\Phi(\vec{u}) - \Phi(\vec{u}) \geq \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u} - \vec{u}), \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0. \quad (2.36)$$

consequentemente,

$$\int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega \geq \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u} - \vec{u}) d\Omega, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.35) em (2.37), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega &\geq \int_{\Omega} \vec{b} \cdot (\vec{u} - \vec{u}) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot (\vec{u} - \vec{u}) d\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

sendo

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}).$$

Agora, (2.38) implica em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma &\geq \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma, \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

em que

$$\Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}).$$

isto é,

$$\pi(\vec{u}) \geq \pi(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.40)$$

sendo

$$\pi(\vec{u}) = \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma.$$

### 2.3.4 Formulação Variacional

O problema variacional pode ser formulado como:

$\vec{u} \in \mathbf{V}_0$  é solução do problema com restrição, dado em (2.3 ou 2.14) se

$$\vec{u} = \arg \min \pi(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in \mathbf{V}_0 \quad (2.41)$$

sendo

$$\pi(\vec{u}) = \int_{\Omega} \Phi(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma.$$

O resultado em (2.41) permite a seguinte interpretação: dentre todos os campos admissíveis de deslocamentos  $\vec{u} \in \mathbf{V}_0$ , o que minimiza a Energia Potencial Total  $\pi(\vec{u})$  em  $\mathbf{V}_0$  é a solução do problema de condição de contorno, dado em (2.3 ou 2.14). Observa-se que o conjunto  $\mathbf{V}_0$ ,

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d, \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\}, \quad (2.42)$$

requer que  $\vec{u} = \vec{0}$  em  $\Gamma_D$ . Tal restrição pode ser removida através da imposição da condição

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \quad (2.43)$$

como uma restrição de igualdade, no problema de minimização. Neste procedimento, o problema de minimização em (2.41) pode também ser formulado como:  $\vec{u} \in \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V} = \left\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in H^1(\Omega)^d \right\}$ , é solução do problema de valor de contorno, dado por (2.3 ou 2.14) se

$$\vec{u} = \arg \min \pi(\vec{u}) \quad (2.44)$$

sujeito a

$$\vec{h}(\vec{u}) \equiv \vec{u} = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D$$

sendo

$$\pi(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma.$$

### 2.3.5 Definição do problema de minimização

O problema de minimização que corresponde ao problema de condição de contorno, dado por (2.3 ou 2.14), pode ser expresso como:

Determine  $\vec{u} \in \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in H^1(\Omega)^d \right\}$ , que é solução de:

$$\min_{\vec{w} \in \mathbf{V}} \pi(\vec{w}) \quad (2.45)$$

sujeito a

$$\vec{h}(\vec{w}) = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D$$

sendo

$$\pi(\vec{w}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{w}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma$$

e

$$\vec{h}(\vec{w}) = \vec{w}.$$

Para o problema de minimização com restrição (2.45), o lagrangeano  $\check{L}$  é definido como

$$\check{L}(\vec{w}, \vec{\mu}_D) = \check{\pi}(\vec{w}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\mu} \cdot \vec{h}(\vec{w}) d\Gamma \quad (2.46)$$

Aqui, por simplicidade, será considerado que os espaços vetoriais são espaços de Hilbert. Neste caso, o problema de ponto de sela é definido como: encontre  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ , com  $\mathbf{V} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in H^1(\Omega)^d \right\}$  e  $\mathbf{H} = \left\{ \vec{\mu}_D \mid \vec{\mu}_D \in L^2(\Gamma_D)^d \right\}$ , tal que

$$\check{L}(\vec{u}, \vec{\mu}_D) \leq \check{L}(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\lambda}_D), \text{ para cada } (\vec{w}, \vec{\mu}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}. \quad (2.47)$$

Supondo que  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  é a solução do problema de ponto de sela, então a primeira inequação em (2.47) implica em

$$\check{L}(\vec{u}, \vec{\mu}_D) \leq \check{L}(\vec{u}, \vec{\lambda}_D), \forall \vec{\mu}_D \text{ em } \mathbf{H}. \quad (2.48)$$

isto é,

$$\check{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\mu}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma \leq \check{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma, \forall \vec{\mu}_D \text{ em } \mathbf{H}. \quad (2.49)$$

ou seja,

$$\int_{\Gamma_D} (\vec{\lambda}_D - \vec{\mu}_D) \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0, \forall \vec{\mu}_D \text{ em } \mathbf{H}. \quad (2.50)$$

Agora, tomando-se  $\vec{\mu}_D = \vec{0}$  em (2.50), obtem-se

$$\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0. \quad (2.51)$$

que indica a ortogonalidade entre o multiplicador de Lagrange  $\vec{\lambda}_D$  e a função

restrição  $\vec{h}(\vec{u})$  em  $L^2(\Gamma_D)^d$ . Além disso, tomando-se  $\vec{\mu}_D = \vec{\lambda}_D + \delta\vec{\lambda}_D$ ,  $\delta\vec{\lambda}_D$  em  $\mathbf{H}$ , obtem-se

$$\int_{\Gamma_D} \delta\vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0, \forall \delta\vec{\lambda}_D \text{ em } \mathbf{H}, \quad (2.52)$$

resultando em

$$\vec{h}(\vec{u}) = 0 \text{ em } \Gamma_D \quad (2.53)$$

com

$$\vec{h}(\vec{u}) \in \mathbf{H}.$$

Isto indica que a solução  $\vec{u}$  do problema de ponto de sela satisfaz a restrição do problema original de minimização (2.41), isto é,

$$\vec{u} \in \mathbf{V} \text{ e } \vec{h}(\vec{u}) = 0 \text{ em } \Gamma_D \quad (2.54)$$

ou seja

$$\vec{u} \in \mathbf{V}_0.$$

Segue-se, também, da segunda inequação no problema de ponto de sela (2.47) que

$$\check{L}(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\lambda}_D), \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V} \quad (2.55)$$

isto é,

$$\check{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma \leq \check{\pi}(\vec{w}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{w}) d\Gamma, \forall \vec{w} \in \mathbf{V} \quad (2.56)$$

ou

$$\check{\pi}(\vec{w}) - \check{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot (\vec{h}(\vec{w}) - \vec{h}(\vec{u})) d\Gamma \geq 0, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}.$$

Seja o funcional  $\check{\pi}(\cdot)$   $G$ -diferenciável em  $\mathbf{V}$ , então

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] = \left. \frac{d}{d\alpha} \{ \check{\pi}(\vec{u} + \alpha\vec{w}) \} \right|_{\alpha=0}. \quad (2.57)$$

Seja  $\vec{h}(\vec{u})$   $G$ -diferenciável em  $\mathbf{H}$ , então

$$D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] = \left. \frac{d}{d\alpha} \{ \vec{h}(\vec{u} + \alpha\vec{w}) \} \right|_{\alpha=0}. \quad (2.58)$$

Agora, fazendo  $\vec{w} = \vec{u} + \alpha \delta \vec{u}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  em (2.56), obtem-se

$$\check{\pi}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \check{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \left( \vec{h}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \vec{h}(\vec{u}) \right) d\Gamma \geq 0, \forall \delta \vec{u} \in \mathbf{V}. \quad (2.59)$$

Dividindo-se (2.59) por  $\alpha > 0$  e tomando-se o limite com  $\alpha \rightarrow 0$ , resulta

$$\lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left\{ \frac{\check{\pi}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \check{\pi}(\vec{u})}{\alpha} \right\} + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{h}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \vec{h}(\vec{u})}{\alpha} \right) d\Gamma \geq 0 \quad (2.60)$$

ou seja,

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] d\Gamma \geq 0$$

sendo

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] = \lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left\{ \frac{\check{\pi}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \check{\pi}(\vec{u})}{\alpha} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{\check{\pi}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \check{\pi}(\vec{u})}{\alpha} \right\}$$

e

$$D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] = \lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{h}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \vec{h}(\vec{u})}{\alpha} \right\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{h}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \vec{h}(\vec{u})}{\alpha} \right\}.$$

Agora, dividindo-se (2.59) por  $\alpha < 0$ , e tomando o limite para  $\alpha \rightarrow 0$ , obtem-se

$$\lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left\{ \frac{\check{\pi}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \check{\pi}(\vec{u})}{\alpha} \right\} + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} \left( \frac{\vec{h}(\vec{u} + \alpha \delta \vec{u}) - \vec{h}(\vec{u})}{\alpha} \right) d\Gamma \leq 0 \quad (2.61)$$

isto é,

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] d\Gamma \leq 0.$$

Agora, de (2.60) e (2.61), tem-se

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] d\Gamma = 0, \forall w \in \mathbf{V} \quad (2.62)$$

sendo

$$D\check{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{d}{d\alpha} \{ \check{\pi}(\vec{u} + \alpha \vec{w}) \} \Big|_{\alpha=0}$$



e

$$D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \vec{h}(\vec{u} + \alpha\vec{w}) \right\} \Big|_{\alpha=0}.$$

Além disso, da segunda inequação e da condição de ortogonalidade em (2.51), isto é,

$$\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0, \quad (2.63)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\vec{u}) &= \tilde{\pi}(\vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma \\ &= \check{L}(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\lambda}_D), \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V} \end{aligned} \quad (2.64)$$

ou seja,

$$\tilde{\pi}(\vec{u}) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\lambda}_D) = \tilde{\pi}(\vec{w}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda} \cdot \vec{h}(\vec{w}) dA, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}. \quad (2.65)$$

Entretanto, ao se fazer

$$\vec{h}(\vec{w}) = 0, \text{ em } \Gamma_D \quad (2.66)$$

obtem-se

$$\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{w}) d\Gamma = 0 \quad (2.67)$$

isto é,

$$\tilde{\pi}(\vec{u}) \leq \check{L}(\vec{w}, \vec{\lambda}_D) = \tilde{\pi}(\vec{w}) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{w}) d\Gamma = \tilde{\pi}(\vec{w}), \quad (2.68)$$

para todo  $\vec{w} \in \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}$ , ou seja,

$$\tilde{\pi}(\vec{u}) \leq \tilde{\pi}(\vec{w}), \text{ para todo } \vec{w} \in \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}. \quad (2.69)$$

Entretanto, se o problema de ponto de sela (2.47) está resolvido, sua solução  $\vec{u}$  se torna o minimizador de  $\tilde{\pi}(\vec{u})$  no conjunto limitado  $\mathbf{V}_0$  (2.41),

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbf{V}, \vec{h}(\vec{v}) = \vec{0} \text{ em } \Gamma_D \right\} \quad (2.70)$$

em que, no caso particular deste estudo,

$$\vec{h}(\vec{v}) = \vec{v}.$$

Além disso,  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  pode ser caracterizado por

- (a)  $\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0$
- (b)  $\int_{\Gamma_D} \delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{h}(\vec{u}) d\Gamma = 0, \forall \delta \vec{\lambda}_D$  em  $\mathbf{H}$ , que implica em  $\vec{h}(\vec{u}) = 0$  em  $\Gamma_D$
- (c)  $D\tilde{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] d\Gamma = 0, \forall \vec{w} \in \mathbf{V}$ .

As relações (a), (b) e (c) acima são chamadas condições de Kuhn-Tucker para o problema de minimização com restrição em (2.45).

### 2.3.6 Determinação dos termos $D\tilde{\pi}(\vec{u})[\vec{w}]$ e $D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}]$

Por definição, tem-se

$$D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \vec{h}(\vec{u} + \alpha \vec{w}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \quad (2.71)$$

em que

$$\vec{h}(\vec{u}) = \vec{u}$$

assim,

$$D\vec{h}(\vec{u})[\vec{w}] = \vec{w}. \quad (2.72)$$

Além disso,

$$D\tilde{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{\pi}(\vec{u} + \alpha \vec{w}) \right\} \Big|_{\alpha=0} \quad (2.73)$$

com

$$\tilde{\pi}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma$$

daí

$$D\tilde{\pi}(\vec{u})[\vec{w}] = \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma. \quad (2.74)$$

Substituindo-se (2.73) e (2.74) nas condições de Kuhn-Tucker para o problema de minimização com restrição em (2.45), tem-se que a solução  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  para o problema de ponto de sela satisfaz as seguintes relações

- (a)  $\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} dA = 0$
- (b)  $\int_{\Gamma_D} \delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} dA = 0, \forall \delta \vec{\lambda}_D$  em  $\mathbf{H}$ , que implica em  $\vec{u} = 0$  em  $\Gamma_D$ , e
- (c)  $\int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w} d\Gamma = 0,$

$\forall \vec{w} \in \mathbf{V}$ .

A forma fraca do problema pode ser formulada como:

Determine  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_D} (\delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} + \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w}) d\Gamma = 0, \forall (\vec{w}, \delta \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Este resultado será usado no próximo capítulo para a definição da minimização da *compliance* (equação 3.5).



### 3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo formaliza-se a definição de otimização do problema que trata da minimização da *compliance* (flexibilidade) com respeito ao conjunto das formas admissíveis, e também é feita a formulação do problema Hamilton-Jacobi associado ao método do *level set*.

#### 3.1 O problema de otimização

Neste trabalho, denotar-se-á a função objetivo como  $J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  que, por simplicidade será considerada como sendo dada pela *compliance* (flexibilidade), definida por

$$J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{\tau} \cdot \vec{u} d\Gamma. \quad (3.1)$$

Como  $\Omega$  varia durante o processo de otimização,  $\vec{b}$  e  $\vec{\tau}$  devem ser conhecidos para todas as configurações possíveis de  $\Omega$ . Assim, é introduzido um domínio de trabalho  $D$  (um conjunto aberto limitado de  $R^d$ ) que contem todas as formas admissíveis  $\Omega$ , isto é,

$$\Omega \subset D, \quad (3.2)$$

em que  $D$  é um conjunto aberto fixo e limitado de  $R^d$ .

Para se ter um significado matemático preciso em (2.3), escolhe-se  $\vec{b} \in L^2(D)^d$  e  $\vec{\tau} \in H^1(D)^d$  e assume-se que  $\Gamma_D \neq \emptyset$  (pois caso contrário, seria necessário impor uma condição de equilíbrio em  $\vec{b}$  e  $\vec{\tau}$ ). Nesse caso, é sabido que (2.3 ou 2.75) admite uma única solução em  $H^1(D)^d$ .

Define-se um conjunto de formas admissíveis que devem ser conjuntos abertos contidos no domínio de trabalho  $D$  e no volume delimitado  $V_b$ ,

$$\mathcal{P}_{ad} = \{\Omega \subset D \text{ tal que } Vol(\Omega) \leq V_b\} \quad (3.3)$$

sendo

$$Vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d\Omega.$$

*Observação 1:* o conjunto  $\mathcal{P}_{ad}$  como um conjunto que contem subconjuntos de  $R^n$  não possui estrutura linear ou convexa; assim, não faz sentido falar em funcionais convexos neste contexto.

Cabe observar que minimizar a *compliance* (flexibilidade) de um corpo equivale a maximizar sua rigidez; isto significa que neste caso, formas otimizadas tendem a usar o máximo de material possível. Entretanto, em muitas aplicações práticas pode-se imaginar que não somente deve ser aplicado um critério para a *compliance* ser minimizada como também um critério para a quantidade de material, especialmente se existem custos associados com o material. Assim, faz sentido penalizar o volume da estrutura no problema de otimização de forma, que é objeto deste estudo, com a introdução de um parâmetro de controle não negativo  $\mu_v \in R$ ,  $\mu_v \geq 0$  modificando a função objetivo (3.1),

$$J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = \int_\Omega \vec{b} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma + \mu_v \int_\Omega 1 \, d\Omega. \quad (3.4)$$

O modelo de problema de otimização de forma que será usado neste trabalho é a minimização de  $J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  com respeito ao conjunto de formas admissíveis, isto é,

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{P}_{ad}} J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) \quad (3.5)$$

em que, para um dado  $\Omega$ ,  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  é a solução de

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) + \int_{\Gamma_D} (\delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} + \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w}) \, d\Gamma = l(\Omega, \vec{w}), \forall (\vec{w}, \delta \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

sendo

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_\Omega \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{u}) \cdot \mathcal{E}(\vec{w}) \, d\Omega$$

e

$$l(\Omega, \vec{w}) = \int_\Omega \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma.$$

É sabido, também, que o problema de minimização (3.5) usualmente não é bem posto no conjunto das formas admissíveis definido por (3.5).<sup>1</sup>

Requer-se algumas restrições de suavidade, ou de geometria, ou de topologia para se obter a existência de formas ótimas. Por exemplo, uma variação de (3.5) com restrição de perímetro produz um problema bem posto

<sup>1</sup>Para o matemático Jacques Hadamard, modelos matemáticos são bem postos, se para todos os dados admissíveis: (i) existe uma solução para o problema (existência), (ii) a solução é única (unicidade) e (iii) a solução depende continuamente dos dados (estabilidade). Se pelo menos uma destas propriedades não valer, o problema é dito mal posto.

(AMBROSIO; BUTTAZZO, 1993). O perímetro  $g_p(\Omega)$  de um conjunto aberto  $\Omega$  é definido como a medida  $(d-1)$  – dimensional de Hausdorff do seu contorno  $\partial\Omega$ , ou seja,  $g_p(\Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)$ , que se reduz a  $g_p(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Gamma$  para domínios suaves.

A partir destas informações, pode-se redefinir o conjunto de formas admissíveis como sendo conjuntos abertos contidos no domínio de projeto  $D$  com volume limitado  $V_b$  e perímetro limitado  $P_b$ , ou seja,

$$\mathcal{P}_{ad} = \{\Omega \subset D \text{ tal que } Per(\Omega) = P\} \quad (3.6)$$

sendo

$$Per(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Gamma$$

Desta forma, é desejável obter uma solução ótima que não somente minimize a *compliance* e o volume do material, mas também satisfaça a restrição de perímetro da forma ótima. Assim faz sentido penalizar não apenas o volume da estrutura mas também o perímetro neste problema de otimização através da introdução de um parâmetro não negativo de controle  $\mu_p \in R$ ,  $\mu_p \geq 0$ , modificando a função objetivo (3.4), como se segue

$$J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma + \mu_v \int_{\Omega} 1 \, d\Omega + \mu_p \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Gamma \quad (3.7)$$

Assim, o problema de otimização de forma pode ser formulado como: minimize  $J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  com respeito ao conjunto das formas admissíveis, isto é,

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{P}_{ad}} J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) \quad (3.8)$$

em que, para um dado  $\Omega$ ,  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  é a solução de

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) + \int_{\Gamma_D} (\delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} + \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w}) \, d\Gamma = l(\Omega, \vec{w}), \forall (\vec{w}, \delta \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}.$$

em que

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{u}) \cdot \mathcal{E}(\vec{w}) \, d\Omega \text{ e } l(\Omega, \vec{w}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} \, d\Gamma.$$

sendo  $\mathcal{P}_{ad} = \{\Omega \subset D \text{ em que } \Omega \text{ possui um contorno de Lipschitz}\}$

**Observação 2:** O problema com a formulação acima é que

$\inf_{\Omega \subset D} J_\mu \left( \Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D \right)$  representa a minimização de  $J_\mu \left( \Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D \right)$  com respeito a um conjunto de domínios abertos  $\Omega \subset D$ . Observa-se que o domínio da função  $J_\mu \left( \Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D \right)$  é definido por  $\Omega \in \mathcal{P}_{ad}$ , que não é um espaço vetorial. Para ser um espaço vetorial, ele deveria satisfazer as propriedades de fechamento, que implica nas propriedades de adição e produto de elementos de  $\mathcal{P}_{ad}$  por um escalar. Assim, para se definir o problema acima de otimização de um modo que não apenas a função objetivo mas também as desigualdades de restrição sejam definidas em um espaço vetorial, no qual os elementos são funções com alguma regularidade, deve-se introduzir a ideia de *level sets*.

### 3.1.1 Formulação do problema *level set*

Como um *level set* ou um “isocontorno” da função de incorporação (também chamada de função *level set*), a fronteira é implicitamente descrita sem a necessidade de uma representação explícita. Enquanto que a configuração e a conectividade, isto é, a topologia da fronteira podem ser submetidas a mudanças drásticas, a função *level set* permanece simples em sua topologia.

Entretanto, com um cálculo eficiente e direto no espaço que define a solução, as fronteiras do projeto podem ser rastreadas até um nível requerido de exatidão, produzindo uma estrutura ótima tanto na forma como na topologia. Os modelos *level set* são referidos como uma representação de uma região e podem facilmente representar contornos complexos que podem formar vazios, divididos em múltiplos pedaços, ou se fundir com outros para formar uma só peça.

Baseado no conceito de propagação da interface *level set*, um algoritmo de otimização é obtido da sensibilidade de forma e das variações do *level set* dos contornos incorporados.

Seja um conjunto limitado  $D \subset \mathbb{R}^d$  o domínio de trabalho no qual todas as configurações admissíveis  $\Omega$  estão incluídas, isto é,  $\Omega \subset D$ . Parametriza-se a fronteira de  $\Omega$  através da função *level set*, seguindo a ideia de Osher e Sethian (1988). Define-se esta função *level set*  $\phi$  em  $D$  como

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= 0 \iff \vec{x} \in \partial\Omega \cap D && \text{(contorno)} \\ \phi(\vec{x}) &< 0 \iff \vec{x} \in (D \setminus \bar{\Omega}) && \text{(ausência de material)} \\ \phi(\vec{x}) &> 0 \iff \vec{x} \in \Omega, && \text{(presença de material)} \end{aligned} \tag{3.9}$$



em que a normal  $\vec{n}$  ao domínio genérico  $\Omega$  é calculada como

$$\vec{n} = -\frac{\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})}{\|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\|}. \quad (3.10)$$

### 3.1.1.1 Problema de minimização com restrição de inequação

A formulação *level set* permite que se reformule o problema de otimização em (3.8) como se segue

$$\inf_{\phi \in \mathbf{W}} J_{\mu}(\phi, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) \quad (3.11)$$

sendo

$$J_{\mu}(\phi, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = J(\phi, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) + \mu_v g_v(\phi) + \mu_p g_p(\phi)$$

com

$$J(\phi, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = \int_D \vec{b} \cdot \vec{u} h(\phi) d\Omega + \int_D \vec{t} \cdot \vec{u} \delta_{\Gamma_N}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\| d\Omega$$

$$g_v(\phi) = \int_D h(\phi) d\Omega$$

e

$$g_p(\phi) = \int_D 1 \delta_{\Gamma}(\phi) \|\nabla_{\vec{x}}\phi(\vec{x})\| d\Omega$$

em que, para um dado  $\phi$ ,  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$  é solução de

$$a(\phi, \vec{u}, \vec{w}) + \int_{\Gamma_u} (\delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{u} + \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w}) d\Gamma = l(\phi, \vec{w}), \forall (\vec{w}, \delta \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H},$$

para

$$a(\phi, \vec{u}, \vec{w}) = \int_D \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{u}) \cdot \mathcal{E}(\vec{w}) h(\phi) d\Omega$$

e

$$l(\phi, \vec{w}) = \int_D \vec{b} \cdot \vec{w} h(\phi) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \vec{t} \cdot \vec{w} d\Gamma.$$

Aqui,  $\mathbf{W} = \{\phi \mid \phi \in H^q(D) \text{ para um } q \text{ suficientemente grande}\}$ ,  $h(\phi)$  é a função Heaviside, definida como

$$h(\phi(\vec{x})) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi(\vec{x}) \geq 0 \\ 0, & \text{se } \phi(\vec{x}) < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

e  $\delta_{\Gamma_N}(\phi)$  é a função delta de Dirac definida em termos de distribuições como

$$\delta(\phi(\vec{x})) = \frac{d}{d\phi} \{h(\phi(\vec{x}))\} \text{ para } \vec{x} \in \Gamma_N.$$

### 3.1.2 Análise de sensibilidade

O problema de otimização sem restrições (3.11) pode ser reformulado considerando-se que  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  sejam independentes de  $\phi$  e adicionando-se a equação de estado como uma restrição de igualdade; assim, o problema de otimização de forma pode ser reformulado, na forma contínua, como

$$\text{Dado } (\mu_v, \mu_p) \geq (0, 0), \text{ determine } (\Omega_o, \vec{u}_o, \vec{\lambda}_{D_o}) \text{ tal que} \quad (3.13)$$

$$J_\mu(\Omega_o, \vec{u}_o, \vec{\lambda}_{D_o}) = \inf \left\{ J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) \right\}$$

sujeita a restrição de igualdade:  $\left\{ \text{com relação a } \Omega \text{ e } (\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H} \right\},$

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) + \int_{\Gamma_D} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{q}_D \right\} d\Gamma = l(\Omega, \vec{w}), \forall (\vec{w}, \vec{q}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

em que

$$J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) + \mu_v g_v(\Omega) + \mu_p g_p(\Omega)$$

com

$$J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Gamma$$

$$a(\Omega, \vec{u}, \vec{w}) = \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{w}) d\Omega$$

$$l(\Omega, \vec{w}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{w} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{w} dA$$

$$g_v(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d\Omega$$

$$g_p(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 d\Omega$$

O funcional lagrangeano associado com o problema de otimização

(3.13) é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D) &= J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) - \\ &- \left\{ a(\Omega, \vec{u}, \vec{p}_u) + \int_{\Gamma_D} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \vec{p}_u + \vec{u} \cdot \vec{p}_D \right\} dA - l(\Omega, \vec{p}_u) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_\mu(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) &= J(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D) + \mu_v g_v(\Omega) + \mu_p g_p(\Omega) \\ J(\Omega, \vec{u}) &= \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \vec{u} \, d\Gamma \\ g_v(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 \, d\Omega \end{aligned}$$

e

$$g_p(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\Omega$$

Fazendo uso da metodologia proposta por (CEA, 1986), pode-se deduzir a equação de estado associado ao problema de otimização em (3.14), determinando a condição de estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{p}_u$  e  $\vec{p}_D$ .

Da estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{p}_u$  tem-se

$$\begin{aligned} D\tilde{L}(\cdot)[\delta\vec{p}_u] &= 0 = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D + \alpha\delta\vec{p}_D) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &\forall \delta\vec{p}_u \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

que implica em

$$a(\Omega, \vec{u}, \delta\vec{p}_u) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \delta\vec{p}_u \, d\Gamma = l(\Omega, \delta\vec{p}_u)$$

Da estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{p}_D$  tem-se

$$\begin{aligned} D\tilde{L}(\cdot)[\delta\vec{p}_D] &= 0 = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D + \alpha\delta\vec{p}_D) \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &\forall \delta\vec{p}_D \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

que implica em

$$a(\Omega, \vec{u}, \delta\vec{p}_D) + \int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \delta\vec{p}_D \, d\Gamma = l(\Omega, \delta\vec{p}_D)$$

Combinando os resultados acima, obtem-se: dado  $\Omega$ ,

$$\text{determine } (\vec{u}, \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \quad (3.17)$$

$$a(\Omega, \vec{u}, \delta \vec{p}_u) + \int_{\Gamma_D} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{p}_u + \vec{u} \cdot \delta \vec{p}_D \right\} d\Gamma = l(\Omega, \delta \vec{p}_u),$$

$$\forall (\delta \vec{p}_u, \delta \vec{p}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}, \text{ sendo}$$

$$a(\Omega, \vec{u}, \delta \vec{p}_u) = \int_{\Omega} \mathbb{D}\varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{p}_u) d\Omega$$

e

$$l(\Omega, \delta \vec{p}_u) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \delta \vec{p}_u d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \delta \vec{p}_u d\Gamma.$$

Para a determinação da equação adjunta associada ao problema de otimização (3.13), determina-se a estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{u}$  e  $\vec{\lambda}_D$ .

Da estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{u}$  tem-se

$$D\tilde{L}(\cdot)[\delta \vec{u}] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u} + \alpha \delta \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D) \right\} \Big|_{\alpha=0} \quad (3.18)$$

$$= 0 = l(\Omega, \delta \vec{u}) - a(\Omega, \delta \vec{u}, \vec{p}_u) - \int_{\Gamma_D} \vec{p}_D \cdot \delta \vec{u} dA$$

$$\forall \delta \vec{u} \in \mathbf{V}.$$

Da estacionaridade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a  $\vec{\lambda}_D$  tem-se

$$D\tilde{L}(\cdot)[\delta \vec{\lambda}_D] = \frac{d}{d\alpha} \left\{ \tilde{L}(\Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D + \alpha \delta \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D) \right\} \Big|_{\alpha=0} = \quad (3.19)$$

$$= \int_{\Gamma_D} \delta \vec{\lambda}_D \cdot \vec{p}_u d\Gamma = 0$$

$$\forall \delta \vec{\lambda}_D \in \mathbf{V}.$$

Combinando os resultados acima, obtem-se

$$\text{dado } \Omega, \text{ determine } (\vec{p}_u, \vec{p}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \quad (3.20)$$

$$a(\Omega, \vec{p}_u, \delta \vec{u}) + \int_{\Gamma_D} \left\{ \vec{p}_D \cdot \delta \vec{u} + \vec{p}_u \cdot \delta \vec{\lambda}_D \right\} d\Gamma = l(\Omega, \delta \vec{u}),$$

$\forall (\delta \vec{u}, \delta \vec{\lambda}_D) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ , sendo

$$a(\Omega, \vec{p}_u, \delta \vec{u}) = \int_{\Omega} \mathbb{D}\mathcal{E}(\vec{p}_u) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) d\Omega$$

e

$$l(\Omega, \delta \vec{u}) = \int_{\Omega} \vec{b} \cdot \delta \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma.$$

Note que

$$(\vec{u}, \vec{\lambda}_D) = (\vec{p}_u, \vec{p}_D)$$

ou seja, dado  $\Omega$ , a solução de estado  $(\vec{u}, \vec{\lambda}_D)$  e a solução adjunta  $(\vec{p}_u, \vec{p}_D)$  são iguais, isto é, o problema é autoadjunto.

Para se determinar a sensibilidade de  $\tilde{L}(\cdot)$  com relação a uma mudança de  $\Omega$ , usando o mapeamento  $\vec{y}_{\tau} = T_{\tau}(\vec{x}) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x})$ , tem-se

$$D\tilde{L}(\cdot) \left[ \vec{V}(\vec{x}) \right] = \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}_{\tau}(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{\lambda}_D^{\tau}, \vec{p}_u^{\tau}, \vec{p}_D^{\tau}) \right\} \Big|_{\tau=0} \quad (3.21)$$

em que

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{L}(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{\lambda}_D^{\tau}, \vec{p}_u^{\tau}, \vec{p}_D^{\tau}) &= J_{\mu}(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{\lambda}_D^{\tau}) - \\ &- \left\{ a(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{p}_u^{\tau}) + \int_{\Gamma_D^{\tau}} \left\{ \vec{\lambda}_D^{\tau} \cdot \vec{p}_u^{\tau} + \vec{u}_{\tau} \cdot \vec{p}_D^{\tau} \right\} d\Gamma_{\tau} - l(\Omega_{\tau}, \vec{p}_u^{\tau}) \right\} \end{aligned}}$$

sendo

$$J(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{\lambda}_D^{\tau}) = J(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}, \vec{\lambda}_D^{\tau}) + \mu_v g_v(\Omega_{\tau}) + \mu_p g_p(\Omega_{\tau})$$

$$J(\Omega_{\tau}, \vec{u}_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} \vec{b}_{\tau} \cdot \vec{u}_{\tau} d\Omega_{\tau} + \int_{\Gamma_N^{\tau}} \vec{t}_{\tau} \cdot \vec{u}_{\tau} d\Gamma_{\tau}$$

$$g_v(\Omega_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} 1 d\Omega_{\tau}$$

e

$$g_p(\Omega_{\tau}) = \int_{\partial\Omega_{\tau}} 1 d\Gamma_{\tau}.$$

Daí,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L} \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau \right) \right\} &= \frac{d}{d\tau} \left\{ J_\mu \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) \right\} + \frac{d}{d\tau} \left\{ l \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau \right) \right\} \\ - \frac{d}{d\tau} \left\{ a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{u}_\tau \right) \right\} &- \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau + \vec{u}_\tau \cdot \vec{\lambda}_D^\tau \right\} d\Gamma_\tau \right\} \end{aligned}} \quad (3.22)$$

em que

$$J_\mu \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) = J \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) + \lambda_v^k g_v \left( \Omega_\tau \right) + \lambda_p^k g_p \left( \Omega_\tau \right)$$

$$J \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \vec{u}_\tau d\Gamma_\tau$$

$$g_v \left( \Omega_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau} 1 d\Omega_\tau$$

e

$$g_p \left( \Omega_\tau \right) = \int_{\partial\Omega_\tau} 1 d\Gamma_\tau$$

Por simplicidade, cada um dos termos acima será calculado separadamente, como se segue:

A derivada do termo  $l \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau \right)$ , dado por

$$(1) \equiv l \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \vec{w}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \vec{w}_\tau d\Gamma_\tau. \quad (3.23)$$

é

$$\frac{d}{d\tau} (1) \left\{ \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \vec{u}_\tau d\Gamma_\tau \right\} = \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau (\vec{y}_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{u}_\tau (\vec{y}_\tau) \right\} d\Gamma_\tau. \quad (3.24)$$

A derivada do termo  $a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{u}_\tau \right)$ , dado por

$$(2) \equiv a \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{u}_\tau \right) = \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\mathcal{E}_\tau \left( \vec{u}_\tau \right) \cdot \mathcal{E}_\tau \left( \vec{u}_\tau \right) d\Omega_\tau. \quad (3.25)$$

é

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{ (2) \} &= 2 \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\mathcal{E}_\tau \left( \vec{u}_\tau \right) \cdot \mathcal{E}_\tau \left( \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_0^\tau} \{ \mathbb{D}\mathcal{E}_\tau \left( \vec{u}_\tau \right) \cdot \mathcal{E}_\tau \left( \vec{u}_\tau \right) \} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau. \end{aligned} \quad (3.26)$$

com

$$v_{N_\tau} (\vec{y}_\tau) = \vec{v}_\tau (\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau (\vec{y}_\tau).$$

A derivada do termo dado por

$$(3) \equiv \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau + \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right\} d\Gamma_\tau. \quad (3.27)$$

é

$$\frac{d}{d\tau} \{(3)\} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_D^\tau} \left( 2\vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right) d\Gamma_\tau \right\}. \quad (3.28)$$

A derivada do termo dado por

$$(4) \equiv \int_{\Gamma_D^\tau} \left( 2\vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right) d\Gamma_\tau. \quad (3.29)$$

é

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_D^\tau} \left( 2\vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right) d\Gamma_\tau \right\} &= 2 \int_{\Gamma_D^\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \right\} \cdot \vec{u}_\tau + \\ &+ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{u}_\tau \right\} d\Gamma_\tau. \end{aligned} \quad (3.30)$$

A derivada do termo dado por

$$\begin{aligned} (5) &\equiv J_\mu \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) = \\ &= J \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) + \mu_v g_v(\Omega_\tau) + \mu_p g_p(\Omega_\tau). \end{aligned} \quad (3.31)$$

é

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(5)\} &= \frac{d}{d\tau} \left\{ J \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) \right\} + \mu_v \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} + \\ &+ \mu_p \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A derivada do termo dado por

$$(6) \equiv g_v(\Omega_\tau) = \int_{\Omega_\tau} 1 d\Omega_\tau \quad (3.33)$$

é

$$\frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} \Big|_{\tau=0} = \int_{\partial\Omega_o} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) d\Gamma_o.$$

A derivada do termo dado por

$$(7) \equiv g_p(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau) = \int_{\partial\Omega_\tau} 1 d\Gamma_\tau \quad (3.34)$$

é

$$\left. \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\} \right|_{\tau=0} = \int_{\partial\Omega_o} H_o(\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_o(\vec{x}) d\Gamma_o$$

com

$$H_o(\vec{x}) = \operatorname{div} [\vec{n}_o(\vec{x})].$$

A derivada do termo dado por

$$\begin{aligned} (8) \equiv J_\eta \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) &= J(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau) + \frac{1}{2\eta^k} \left( \langle g_v(\Omega_\tau) \rangle^+ \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2\eta^k} \left( \langle g_p(\Omega_\tau) \rangle^+ \right)^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

é

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(8)\} &= \frac{d}{d\tau} \{J(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\} + \frac{1}{\eta^k} \langle g_v(\Omega_\tau) \rangle^+ \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} \\ &+ \frac{1}{\eta^k} \langle g_p(\Omega_\tau) \rangle^+ \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau) &= \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \vec{u}_\tau d\Gamma_\tau \\ &= l(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{d\tau} \{J(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\} = \frac{d}{d\tau} \{l(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\}. \quad (3.38)$$

Juntando os resultados acima, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{(8)\} &= \frac{d}{d\tau} \{l(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\} + \frac{1}{\eta^k} \langle g_v(\Omega_\tau) \rangle^+ \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} + \\ &+ \frac{1}{\eta^k} \langle g_p(\Omega_\tau) \rangle^+ \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Agora, juntando todos os termos, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L} \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau \right) \right\} &= 2 \frac{d}{d\tau} \{l(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\} - \frac{d}{d\tau} \{a(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{u}_\tau)\} \\ &+ \mu_v \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} + \\ &+ \mu_p \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\} + \\ &- \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_D^\tau} \left( 2 \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right) d\Gamma_\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$



sendo

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \{l(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau)\} &= \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{\vec{u}_\tau\} d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau \right\} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad (3.41) \\
 \frac{d}{d\tau} \{a(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{u}_\tau)\} &= 2 \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau \left( \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_0^\tau} \{ \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 \frac{d}{d\tau} \{g_v(\Omega_\tau)\} &= \int_{\Gamma_0^\tau} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 \frac{d}{d\tau} \{g_p(\Omega_\tau)\} &= \int_{\Gamma_0^\tau} H_\tau(\vec{y}_\tau) v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_D^\tau} \left( 2 \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{u}_\tau \right) d\Gamma_\tau \right\} &= 2 \int_{\Gamma_D^\tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \right\} \cdot \vec{u}_\tau + \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \vec{u}_\tau \} \right) d\Gamma_\tau.
 \end{aligned}$$

Substituindo (3.41) em (3.40), obtem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L} \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau \right) \right\} &= 2 \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Omega_\tau + 2 \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau \right\} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad + 2 \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad - 2 \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau \left( \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_0^\tau} \{ \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad + \mu_v \int_{\Gamma_0^\tau} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad + \mu_p \int_{\Gamma_0^\tau} H_\tau(\vec{y}_\tau) v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\
 &\quad - 2 \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} + \vec{u}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau} \right\} d\Gamma_\tau.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Entretanto, como  $\left( \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau} \right) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$ , para conjuntos suficientemente suas, tem-se que a seguinte forma fraca: dado  $\Omega_\tau$ , o problema de estado pode ser formulado como:

$$\text{determine } \left( \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau \right) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H} \text{ solução de} \tag{3.43}$$

$$a(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{w}_\tau) + \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \vec{w}_\tau + \vec{u}_\tau \cdot \vec{\mu}_D^\tau \right\} d\Gamma_\tau = l(\Omega_\tau, \vec{w}_\tau), \forall (\vec{w}_\tau, \vec{\mu}_D^\tau) \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

sendo

$$a(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{w}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau(\vec{w}_\tau) d\Omega_\tau$$

e

$$l(\Omega_\tau, \vec{w}_\tau) = \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \vec{w}_\tau d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \vec{w}_\tau d\Gamma_\tau.$$

é também satisfeito para  $\left(\frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau}\right) \Leftrightarrow (\vec{w}_\tau, \vec{\mu}_D)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} a\left(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) + \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} + \vec{u}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau} \right\} d\Gamma_\tau \\ = l_\tau\left(\Omega_\tau, \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

sendo

$$a_\tau\left(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) = \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) d\Omega_\tau$$

e

$$l_\tau\left(\Omega_\tau, \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) = \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Gamma_\tau.$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{\lambda}_D^\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} + \vec{u}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau} \right\} d\Gamma_\tau \\ = \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Gamma_\tau. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Substituindo (3.45) em (3.42), pode-se reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}\left(\Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau\right) \right\} &= 2 \int_{\Omega_\tau} \vec{b}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Omega_\tau + 2 \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau \right\} \nu_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma_N^\tau} \vec{t}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau} d\Gamma_\tau - 2 \int_{\Omega_\tau} \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau\left(\frac{\partial \vec{u}_\tau}{\partial \tau}\right) d\Omega_\tau \\ &\quad - 2 \int_{\Gamma_D^\tau} \left\{ \vec{u}_\tau \cdot \frac{\partial \vec{\lambda}_D^\tau}{\partial \tau} \right\} d\Gamma_\tau \\ &\quad - \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \mathbb{D}\varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau(\vec{u}_\tau) \right\} \nu_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad + \mu_\nu \int_{\Gamma_0^\tau} \nu_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad + \mu_p \int_{\Gamma_0^\tau} H_\tau(\vec{y}_\tau) \nu_{N_\tau} d\Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (3.46)$$

resultando

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L} \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau \right) \right\} &= 2 \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \vec{b}_\tau \cdot \vec{u}_\tau \right\} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad - \int_{\Gamma_0^\tau} \left\{ \mathbb{D} \varepsilon_\tau (\vec{u}_\tau) \cdot \varepsilon_\tau (\vec{u}_\tau) \right\} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad + \mu_v \int_{\Gamma_0^\tau} v_{N_\tau} d\Gamma_\tau \\ &\quad + \mu_p \int_{\Gamma_0^\tau} H_\tau (\vec{y}_\tau) v_{N_\tau} d\Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (3.47)$$

consequentemente

$$D\tilde{L} \left( \Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D \right) \left[ \vec{V}(\vec{x}) \right] = \frac{d}{d\tau} \left\{ \tilde{L}_\tau \left( \Omega_\tau, \vec{u}_\tau, \vec{\lambda}_D^\tau, \vec{p}_u^\tau, \vec{p}_D^\tau \right) \right\} \Big|_{\tau=0} \quad (3.48)$$

implicando em

$$\boxed{\begin{aligned} D\tilde{L} \left( \Omega, \vec{u}, \vec{\lambda}_D, \vec{p}_u, \vec{p}_D \right) \left[ \vec{V}(\vec{x}) \right] &= 2 \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{b} \cdot \vec{u} \right\} v_N d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma_0} \left\{ \mathbb{D} \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\vec{u}) \right\} v_N d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \mu_v v_N d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} \mu_p H(\vec{x}) v_N d\Gamma. \end{aligned}} \quad (3.49)$$

## 3.2 Abordagem euleriana em otimização de forma

### 3.2.1 Dedução da equação Hamilton–Jacobi

Seguindo o processo de otimização, a configuração (forma) evolui de acordo com um tempo fictício que corresponde a um passo de descida. Como se sabe, se as configurações evoluem no tempo, a evolução da função *level set* é governada por uma equação Hamilton–Jacobi. Para ser mais preciso, assume-se que  $\Omega$  seja a configuração inicial e considera-se o mapeamento

$$T : \vec{x} \in \Omega \subset D \rightarrow \vec{y}_\tau \in \Omega_\tau \subset D$$

dado por

$$\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x}) \equiv T(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}) \quad (3.50)$$

para alguma função conhecida  $\vec{V}(\vec{x}) = v_N(\vec{x}) \vec{n}_o(\vec{x})$  definida em  $D$ .

Aqui,  $\vec{V}(\vec{x})$  é o vetor velocidade normal com componente  $v_N(\vec{x})$  e sendo  $\vec{n}(\vec{x})$  o vetor unitário normal a  $\partial\Omega$ , a ser determinado com a análise de sensibilidade.

Neste mapeamento proposto,  $T_\tau(\vec{x})$ , a forma  $\Omega$  evolui no tempo  $\tau \in \mathbb{R}^+$

com a velocidade normal  $\vec{V}(\vec{x})$ , resultando em

$$\Omega_\tau = T_\tau(\Omega). \quad (3.51)$$

Aqui, define-se o conjunto aberto  $\Omega$  como sendo relacionado com a função *level set* inicial  $\phi(\vec{x})$ , como

$$\Omega = \{\vec{x} \in D \mid \phi(\vec{x}) > 0\}. \quad (3.52)$$

Do mapeamento em (3.50), tem-se, para cada  $\tau \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x}) \text{ e } \vec{x} = T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau). \quad (3.53)$$

Assim,  $\vec{y}_\tau$  é o sistema de coordenadas usado na descrição dos campos definidos em  $\Omega_\tau$  (configuração perturbada/deformada) e  $\vec{x}$  é o sistema de coordenadas usado na descrição dos campos definidos em  $\Omega$ . A abordagem euleriana consiste em descrever o problema em termos de  $\vec{y}_\tau$ .

Do mapeamento em (3.53) pode-se escrever a descrição euleriana da função *level set* como

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau) = \phi(\vec{x})|_{\vec{x}=T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)} \quad (3.54)$$

ou equivalentemente

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = \phi(\vec{x})$$

para todo  $\tau \in \mathbb{R}^+$ .

Consequentemente,

$$\Omega_\tau = \{\vec{y}_\tau(\vec{x}) \in D \mid \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) > 0\} \quad (3.55)$$

sendo

$$\vec{y}_\tau(\vec{x}) = T_\tau(\vec{x}).$$

Baseado na abordagem euleriana, e na definição do contorno de  $\Omega_\tau$ , dado por

$$\partial\Omega_\tau = \{\vec{y}_\tau(\vec{x}) \in D \mid \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = 0\} \quad (3.56)$$

em que

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau).$$

tem-se que

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau) = 0 \text{ para qualquer } \vec{y}_\tau \in \partial\Omega_\tau \text{ e todo } \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (3.57)$$

ou

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = 0 \text{ para qualquer } \vec{x} \in \partial\Omega \text{ e todo } \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Diferenciando (3.57) em termos de  $\tau$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{\phi_\tau(\vec{y}_\tau)\} &= \lim_{d\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{\phi(\vec{y}_{\tau+d\tau}, \tau+d\tau) - \phi(\vec{y}_\tau, \tau)}{d\tau} \right\} = \\ &= \lim_{d\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{0-0}{d\tau} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

isto é,

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} = 0 \quad (3.59)$$

ou

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle = 0$$

sendo

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau)$$

e

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = \vec{V}(\vec{x}) \Big|_{T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)}.$$

De forma equivalente, usando-se a expressão  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = 0$  para qualquer  $\vec{x} \in \partial\Omega$  e para todo  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , obtém-se

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \frac{d\vec{y}_\tau(\vec{x})}{d\tau} = 0 \quad (3.60)$$

ou

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} + \left\langle \nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau) \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}, \vec{V}(\vec{x}) \right\rangle = 0$$

isto é,

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} + \left\langle \frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \vec{x}} \left[ \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \right]^{-1}, \vec{V}(\vec{x}) \right\rangle = 0$$

em que

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \equiv \phi(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau).$$

Agora, supondo-se que  $\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)$  seja da forma

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = \nu_{N_\tau}(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \quad (3.61)$$

ou

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))$$

obtem-se

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} - v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle = 0 \quad (3.62)$$

Agora, como

$$\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = - \frac{\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\|} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \quad (3.63)$$

obtem-se, também, que

$$\frac{\partial \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \tau} - v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))\| = 0 \quad (3.64)$$

onde, em  $\tau = 0$ , a condição inicial é dada por

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))|_{\tau=0} = \phi(\vec{x})$$

que é calculada como sendo a função distância sinalizada, dada por

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in \bar{\Omega} \\ -\min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Esta equação Hamilton–Jacobi é válida em todo  $D$ , e não somente no contorno  $\partial\Omega_\tau$ , se a velocidade  $v_{N_\tau}$  é conhecida em toda parte (como será o caso a seguir).

### 3.2.2 Formulação do problema de Hamilton-Jacobi

O problema de Hamilton-Jacobi, associado ao método do *level set* pode ser resumido como:

Considera-se uma interface fechada móvel  $\partial\Omega$  em  $R^d$  com codimensão 1. Seja  $\Omega_\tau = T_\tau(\Omega)$  a região (possivelmente multiconectada) que  $\partial\Omega_\tau$  envolve. Associa-se a  $\Omega_\tau$  uma função auxiliar  $\phi(\vec{y}_\tau, \tau)$ , chamada de função *level set*, que é Lipschitz contínua e que satisfaz as seguintes

condições

$$\begin{aligned}\phi(\vec{y}_\tau, \tau) = 0 &\iff \vec{y}_\tau \in \partial\Omega_\tau \cap D && \text{(contorno)} \\ \phi(\vec{y}_\tau, \tau) > 0 &\iff \vec{y}_\tau \in \Omega_\tau && \text{(presença de material)} \\ \phi(\vec{y}_\tau, \tau) < 0 &\iff \vec{y}_\tau \in (D \setminus \bar{\Omega}_\tau) && \text{(ausência de material)}\end{aligned}\tag{3.65}$$

O método do level set consiste em mover a interface  $\partial\Omega = \{\cdot\}$  usando a solução de uma equação do tipo Hamilton-Jacobi, dada por

$$\frac{\partial\phi(\vec{y}_\tau, \tau)}{\partial\tau} - v_N(\vec{y}_\tau, \tau) \|\nabla_{\vec{y}_\tau}\phi(\vec{y}_\tau, \tau)\| = 0\tag{3.66}$$

sujeita à condição inicial

$$\phi_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))|_{\tau=0} = \phi(\vec{x}).$$

A função condição inicial  $\phi(\vec{x})$  é definida como sendo a função distância sinalizada à interface, dada por (MOURAD; DOLBOW; GARIKIPATI, 2005)

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in \bar{\Omega} \\ -\min_{\vec{z} \in \partial\Omega} \|\vec{x} - \vec{z}\|, & \text{se } \vec{x} \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}\tag{3.67}$$

Uma das boas características da formulação *level set* é que essas quantidades geométricas possuem representações simples em termos de  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau) \equiv \phi(\vec{y}_\tau, \tau)$ , ou seja,

$$\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) = \frac{\nabla_{\vec{y}_\tau}\phi_\tau(\vec{y}_\tau)}{\|\nabla_{\vec{y}_\tau}\phi_\tau(\vec{y}_\tau)\|}\tag{3.68}$$

$$H_\tau(\vec{y}_\tau) = \text{div}[\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)]$$

$$\text{Per}(\Omega_\tau) \equiv |\partial\Omega_\tau| = \int_D \delta(\phi_\tau(\vec{y}_\tau)) \|\nabla_{\vec{y}_\tau}\phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| d\Omega$$

e

$$\text{Vol}(\Omega_\tau) \equiv |\Omega_\tau| = \int_D h(\phi_\tau(\vec{y}_\tau)) d\Omega$$

em que  $\delta(\phi)$  é a função delta de Dirac (1D),  $h(\phi_\tau)$  é a função Heaviside (1D), que vale 0 para  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau) \leq 0$  e 1 em caso contrário, e  $H_\tau(\vec{y}_\tau)$  é escolhida de tal forma que a bola possua curvatura principal positiva igual a recíproca do seu raio. Em 2D,  $|\partial\Omega_\tau|$  é o comprimento de arco de  $\partial\Omega_\tau$  e  $|\Omega_\tau|$  é a área de  $\Omega_\tau$ , enquanto que em 3D,  $|\partial\Omega_\tau|$  é a área da superfície de  $\partial\Omega_\tau$  e  $|\Omega_\tau|$  é o volume de  $\Omega_\tau$ .

Assim, o método *level set* consiste em estender a equação (3.66) através do espaço e tomar o conjunto *level set* zero como a o contorno da forma em todo o tempo posterior.

Cabe salientar duas questões de importância prática, que são:

- Primeiro, estender  $v_{N_\tau}(\vec{y}_\tau)$  para a interface nem sempre é um processo rotineiro.
- Segundo, para se ter precisão numérica, a função *level set* deve permanecer bem comportada no sentido de que, exceto para pontos isolados,

$$0 < c \leq \|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| \leq C \quad (3.69)$$

para algumas constantes  $c$  e  $C$ . De fato, para muitos problemas, é desejável que  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  seja a função distância sinalizada que satisfaça a condição

$$\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| = 1. \quad (3.70)$$

Observa-se que, se  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  é uma função distância sinalizada, então ela automaticamente satisfaz  $\|\nabla_{\vec{y}_\tau} \phi_\tau(\vec{y}_\tau)\| = 1$ . Entretanto, isto somente é verdade para  $\tau = 0$ , ou seja,  $\|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x})\| = 1$ . Para um tempo diferente  $\tau$ ,  $\phi_\tau(\vec{y}_\tau)$  é obtida usando a solução da equação associada do tipo Hamilton–Jacobi. Assim, devido à dissipação numérica, a propriedade acima da função distância sinalizada pode ser perdida. Daí o porquê ser necessário reinicializar a função Hamilton–Jacobi.



## 4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO *LEVEL SET*

Neste capítulo será descrita a solução da equação *level set* com elementos finitos e a equação de reinicialização.

Devido ao fato de que tanto a equação *level set* quanto a equação de reinicialização são dominadas por equações diferenciais parciais advectivas, o método padrão de elementos finitos de Galerkin pode produzir resultados oscilantes. Assim, usa-se SDFEM (*Stream line Diffusion Finite Element Method*).

A vantagem deste método é que a otimização estrutural em domínios irregulares de projeto pode ser facilmente executada.

O método *level set* se tornou uma técnica emergente para formas estruturais e otimização topológica porque ele pode facilmente manejar mudanças topológicas e decrever contornos suaves. ((ALLAIRE; JOUVE; TOADER, 2004), (WANG; WANG; GUO, 2003)). Na maioria das aplicações, o método *level set* é implementado com técnicas de diferenças finitas, tais como esquema *upwind* ((OSHER; FEDKIW, 2003), (SETHIAN, 1999)). Esses métodos *upwind* funcionam bem em uma grade estruturada, mas aparecem dificuldades se o problema envolve geometrias e contornos complexos, em que não é possível discretização espacial com grade estruturada; entretanto, o método de elementos finitos possui flexibilidade para tratar desses problemas, o que motiva a implementação do método *level set* com elementos finitos.

Normalmente, existem dois estágios no processo de otimização estrutural baseado em *level set*: a análise de tensões e a evolução do contorno. Em aplicações industriais, o primeiro é geralmente abordado com o método dos elementos finitos.

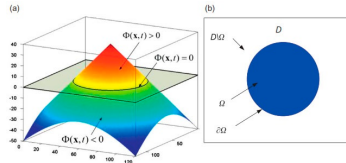
A equação *level set* é uma equação hiperbólica de primeira ordem. Sabe-se que o método padrão de elementos finitos de Galerkin pode produzir instabilidade espacial quando equações puras de advecção ou equações predominantemente advectivas são consideradas. Assim, técnicas de estabilização de elementos finitos devem ser usadas. Barth e Sethian foram os primeiros que discretizaram a equação *level set* em malhas triangulares desestruturadas usando técnicas de elementos finitos ((BARTH; SETHIAN, 1998)) e o método deles foi posteriormente empregado em ((GRAVOUIL; MOËS; BELYTSCHKO, 2002)). Além disso, outras técnicas de elementos finitos foram implementadas para os métodos de *level set*, tais como *Stream-line upwind*/Petrov-Galerkin (SUPG) ((GROSS; REICHEL; REUSKEN, 2006), (TORNBERG; ENGQUIST, 2000), (WEBER; BLAKE; CIPOLLA, 2004)), método dos mínimos quadrados de Galerkin ((CHESSA; SMOLINSKI; BELYTSCHKO, 2002),

(RAO; HUGHES; GARIKIPATI, 2000), (VALANCE et al., 2008)), Galerkin característico ((LIN et al., 2005), (QUECEDO; PASTOR, 2001)), e Galerkin descontínuo ((MARCHANDISE; REMACLE; CHEVAUGEON, 2006)

## 4.1 Solução com elementos finitos da equação Hamilton-Jacobi

### 4.1.1 Método level set baseado em elementos finitos

No método *level set*, o contorno é representado implicitamente através de uma função *level set*  $\phi(\vec{x}, \tau)$ , para cada dado  $\tau$ , que é uma função escalar definida em um domínio fixo de projeto  $D$  que contém o domínio da estrutura. Neste estudo, define-se o contorno como o conjunto *level set* zero, o interior da estrutura como o domínio em que  $\phi(\vec{x}, \tau) > 0$ , e o exterior como o domínio em que  $\phi(\vec{x}, \tau) < 0$  conforme ilustrado na figura (4.1).



**Figura 4.1:** Conjunto level set (SHU et al., 2011)

O método *level set* adiciona dinamismo ao contorno definido implicitamente e sua evolução é governada pela equação Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} - v_N(\vec{x}, \tau) \|\nabla_{\vec{x}} \phi(\vec{x}, \tau)\| = 0 \quad (4.1)$$

sujeita à condição inicial

$$\phi(\vec{x}, 0) = \phi_o(\vec{x}) \quad (4.2)$$

e à condição essencial de contorno

$$\phi(\vec{x}, \tau) = 0 \text{ em } (\vec{x}, \tau) \in \partial\Omega_\tau \times [0, \infty). \quad (4.3)$$

em que  $v_N(\vec{x}, \tau)$  é a velocidade normal no contorno e também é a importante conexão entre o método *level set* e o problema de otimização estrutural. Como a velocidade é calculada usando o resultado da análise de sensibilidade, pode-se atualizar o contorno da estrutura resolvendo a equação (4.1).

Para discretizar a equação (4.1) será usado o método SDFEM conforme descrito em (TORNBERG; ENGQUIST, 2000). A forma fraca da equação (4.1) é obtida conforme se segue:

Aplica-se o método de diferenças finitas, dado pelo método explícito de primeira ordem de Euler, em que

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta \tau} = v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \quad (4.4)$$

sendo

$$\phi^n = \phi(\vec{x}, \tau_n) \quad (4.5)$$

e

$$\phi^{n+1} = \phi(\vec{x}, \tau_{n+1}).$$

Dai, pode-se proceder da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \int_D (\phi^{n+1} - \phi^n) \left( \varphi + \delta_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega - \\ & - \Delta \tau \int_D v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left( \varphi + \delta_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

para cada  $\varphi \in \mathbb{V}$  em que  $\vec{V} = v_N^n \vec{n}^n$ , sendo  $\vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$ , e  $\delta_a$  um parâmetro de estabilização, dado por

$$\delta_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta \tau^2} + \left\| [\mathbf{J}^{-1}] \vec{V} \right\|^2 \right)^{-1}, \quad \vec{V} = v_N^n$$

ou  $\delta_a = \frac{h_e}{2\|v_N\|}$  em que  $h_e$  é o tamanho do elemento.

Para simplificar a determinação da solução da função *level set* com o método SDFEM pode-se aproximar

$$\int_D (\phi^{n+1} - \phi^n) \left( \varphi + \delta_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \simeq \int_D (\phi^{n+1} - \phi^n) (\varphi) d\Omega \quad (4.7)$$

resultando a seguinte forma fraca

$$\int_D (\phi^{n+1} - \phi^n) \varphi d\Omega - \Delta \tau \int_D v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left( \varphi + \delta \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

para cada  $\varphi \in \mathbb{V}$  em que  $\vec{V} = v_N^n \vec{n}^n$ , sendo  $\vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$  e  $\delta_a$  um parâmetro

de estabilização, dado por

$$\delta_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta \tau^2} + \left\| [\mathbf{J}^{-1}] \vec{V} \right\|^2 \right)^{-1}, \vec{V} = v_N^n$$

ou  $\delta_a = \frac{h_e}{2\|v_N^n\|}$  sendo  $h_e$  o tamanho do elemento e  $[\mathbf{J}^{-1}]$  a matriz jacobiana inversa para a transformação de coordenadas naturais para coordenadas globais, conforme mostrado na próxima seção.

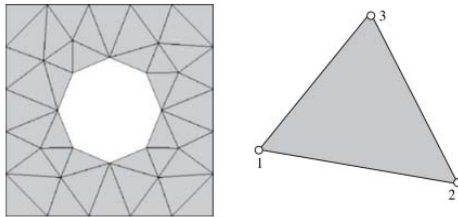
Cabe observar que se fosse usado o método padrão de elementos finitos de Galerkin, somente a função teste para o termo de advecção seria modificada enquanto que o termo transiente continuaria o mesmo. Uma vantagem desse método é que a matriz de coeficientes é simétrica e constante; assim, a matriz é facilmente decomposta, sendo necessário que seja decomposta só uma vez. Além disso, essa matriz é similar à matriz de massa, usada em computação dinâmica, de modo que pode ser substituída por uma matriz diagonal. Assim, o sistema de equações (4.8) é desacoplado e resolvê-lo se torna muito econômico.

A discretização temporal em (4.8) usa o método de Euler progressivo, que é condicionalmente estável; entretanto, o tamanho do intervalo de tempo  $\Delta \tau$  deve satisfazer a condição

$$\Delta \tau \leq \gamma \frac{h^{\min}}{|v_N^n|^{\max}} \quad (4.9)$$

em que  $h^{\min}$  é o tamanho do menor elemento,  $|v_N^n|^{\max}$  é a velocidade máxima nodal e  $\gamma$  é um coeficiente entre 0 e 1. Neste estudo, usar-se-á  $\gamma = 0,5$ .

Para resolver este problema, faz-se uma partição de domínio com elementos finitos Tri3,  $\Omega_e$ , conforme ilustrado na figura (4.2). Assim,



**Figura 4.2:** Elemento finito Tri3

$$\int_D (\phi^{n+1} - \phi^n) \varphi d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} (\phi^{n+1} - \phi^n) \varphi d\Omega \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_D v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left( \varphi + \delta_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = \\ & = \sum_e \int_{\Omega_e} v_N^n \|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\| \left( \varphi + \delta_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Para se determinar a contribuição de cada elemento finito nas integrais acima, introduz-se a seguinte mudança de variável

$$x = x(\xi, \eta) = x_{e_i} N_i(\xi, \eta) \quad (4.11)$$

$$y = y(\xi, \eta) = y_{e_i} N_i(\xi, \eta)$$

em que  $N_i(\xi, \eta)$  são as funções elementos finitos clássicas de interpolação.

No caso particular de elementos Tri3, tem-se

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (4.12)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta$$

assim,

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) x_{e_1} + N_2(\xi, \eta) x_{e_2} + N_3(\xi, \eta) x_{e_3} \quad (4.13)$$

e

$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) y_{e_1} + N_2(\xi, \eta) y_{e_2} + N_3(\xi, \eta) y_{e_3}.$$

Além disso, as funções *level set*  $\phi^n(x, y)$  e  $\phi^{n+1}(x, y)$ , e a função teste (variação *level set*)  $\varphi(x, y)$  são aproximadas, dentro de cada elemento finito  $\Omega_e$ , como

$$\phi^n(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \phi_{e_i}^n N_i(\xi, \eta) \quad (4.14)$$

$$\phi^{n+1}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \phi_{e_i}^{n+1} N_i(\xi, \eta)$$

e

$$\varphi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \varphi_{e_i} N_i(\xi, \eta)$$

Denotando  $\{\vec{q}_e^n\}^T = \{\phi_{e_1}^n, \phi_{e_2}^n, \phi_{e_3}^n\}$ , em que  $(\phi_{e_i}^n)$  representa o  $e_i$ -ésimo valor nodal da função *level set*, pode-se expressar as funções *level set*  $\phi^n(x, y)$  e

$\phi^{n+1}(x, y)$ , e o campo de variação *level set*  $\varphi(x, y)$  como:

$$\phi^n = \vec{N} \cdot \vec{q}_e^n \text{ e } \phi^{n+1} = \vec{N} \cdot \vec{q}_e^{n+1} \quad (4.15)$$

e

$$\varphi = \vec{N} \cdot \delta \vec{q}_e$$

com

$$\vec{N}^T = \{N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta)\}$$

e

$$\delta \vec{q}_e^T = \{\delta \varphi_{e_1}, \delta \varphi_{e_2}, \delta \varphi_{e_3}\}.$$

As componentes dos vetores gradiente  $\nabla_{\vec{x}} \phi^n$ ,  $\nabla_{\vec{x}} \phi^{n+1}$  e  $\nabla_{\vec{x}} \varphi$  podem ser expressadas em forma vetorial como

$$\nabla_{\vec{x}} \phi^n = \left\{ \frac{\partial \phi^n}{\frac{\partial x}{\partial y}} \right\} = [\mathbf{B}] \vec{q}_e^n = [[B_i] \mid i = 1, \dots, 3] \vec{q}_e^n \quad (4.16)$$

$$\nabla_{\vec{x}} \phi^{n+1} = \left\{ \frac{\partial \phi^{n+1}}{\frac{\partial x}{\partial y}} \right\} = [\mathbf{B}] \vec{q}_e^{n+1} = [[B_i] \mid i = 1, \dots, 3] \vec{q}_e^{n+1}$$

e

$$\nabla_{\vec{x}} \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\frac{\partial x}{\partial y}} \right\} = [\mathbf{B}] \delta \vec{q}_e = [[B_i] \mid i = 1, \dots, 3] \delta \vec{q}_e$$

com

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}] &= [[B_1] \mid [B_2] \mid [B_3]] \\ &= \left[ \begin{bmatrix} N_{1,x} \\ N_{1,y} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} N_{2,x} \\ N_{2,y} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} N_{3,x} \\ N_{3,y} \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

## 4.2 Equação de reinicialização

Durante a sua evolução, a função *level set* frequentemente se torna muito achatada ou com declives muito íngremes, o que pode gerar erros numéricos na discretização espacial. Para regularizar a função *level set*, ela deve ser reinicializada periodicamente através da resolução da equação de

reinicialização

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} + \vec{w}(\vec{x}, \tau) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \tau) = \text{sign}(\vec{x}, \tau) \quad (4.19)$$

com

$$\vec{w}(\vec{x}, \tau) = \text{sign}(\vec{x}, \tau) \frac{\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \tau)}{\|\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \tau)\|} \quad (4.20)$$

em que a função sinal é dada por

$$\text{sign}(\vec{x}, \tau) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}. \quad (4.21)$$

sendo  $\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n)$ . O parâmetro  $\alpha_a$  deve ser positivo, por exemplo,  $\alpha_a = 10^{-6}$ .

#### 4.2.1 Introdução do termo de difusão

Uma vez que o método simplificado de difusão fornece um efeito insuficiente de difusão próximo ao contorno onde  $\text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau})$  é pequeno, um termo de difusão relacionado a um  $\varepsilon > 0$ , é introduzido, obtendo-se a seguinte equação de reinicialização

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} + \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}) \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}) - \text{div}[\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau})] = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}). \quad (4.22)$$

Como a condição de contorno essencial *level set* é dada por

$$\phi(\vec{x}, \tau) = 0 \text{ em } (\vec{x}, \tau) \in \partial D \times [0, \infty)$$

impõe-se também a mesma condição de contorno essencial para o campo  $\psi(\vec{x}, \bar{\tau})$ , ou seja, assume-se que

$$\psi(\vec{x}, \bar{\tau}) = 0 \text{ em } (\vec{x}, \bar{\tau}) \in \partial D \times [0, \infty). \quad (4.23)$$

Além disso, assume-se como condição inicial

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n). \quad (4.24)$$

### 4.2.2 Dedução da forma fraca

Para se determinar a forma fraca associada com a equação de reinicialização em (4.22), aplica-se o método de diferenças finitas de Euler, com respeito à evolução do tempo, denotando por

$$\psi^{k+1} = \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) \quad (4.25)$$

$$\psi^k = \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)$$

$$\vec{w}^k = \vec{w}(\vec{x}, \bar{\tau}_k)$$

e

$$S^k = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k)$$

obtem-se

$$\frac{\psi^{k+1} - \psi^k}{\Delta \bar{\tau}} = \text{div} \left[ \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right] + \left( S^k - \vec{w}^k \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi^k \right)$$

sendo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi(\vec{x}, \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} \right|_{\bar{\tau}_k} &= \frac{\psi(\vec{x}, \bar{\tau}_{k+1}) - \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)}{\Delta \bar{\tau}} \\ \vec{w}^k &= S^k \frac{\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)}{\|\nabla_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, \bar{\tau}_k)\|} \end{aligned}$$

e

$$S^k = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}$$

com

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n).$$

Assim, denotando

$$\psi^{k+1} - \psi^k + \Delta \bar{\tau} \left\{ \left\langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \right\rangle - S^k \right\} - \Delta \bar{\tau} \text{div} \left[ \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right] = 0$$

sendo

$$S^k = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}$$

com

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n).$$



A discretização, com respeito ao espaço, é obtida através da aplicação do método simplificado de difusão de elementos finitos (SDFEM) ((TORNBORG; ENGQUIST, 2000)). Daí,

$$\begin{aligned} & \int_D (\psi^{k+1} - \psi^k) \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega + \\ & + \triangle \bar{\tau} \int_D \left\{ \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle - S^k \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \\ & + \triangle \bar{\tau} \int_D \left\{ \text{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

para cada  $\varphi \in \mathbb{V}$  em que  $\vec{V} = v_N^n \vec{n}^n$ , sendo  $\vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$  e  $\bar{\delta}_a$  é o parâmetro de estabilização, dado por

$$\bar{\delta}_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\triangle \bar{\tau}^2} + \left\| [\mathbf{J}^{-1}] \vec{V} \right\|^2 \right)^{-1}, \vec{V} = v_N^n$$

ou  $\bar{\delta}_a = \frac{h_e}{2\|v_N\|}$  em que  $h_e$  é o tamanho do elemento com  $S^k = \text{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}$  e  $\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n)$ .

Aqui, novamente, por simplificação, é feita a seguinte aproximação

$$\int_D (\psi^{k+1} - \psi^k) \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \simeq \int_D (\psi^{k+1} - \psi^k) (\varphi) d\Omega \quad (4.27)$$

e

$$\int_D \left\{ \text{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \simeq \int_D \left\{ \text{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] \right\} (\varphi) d\Omega$$

que resulta em

$$\begin{aligned} & \int_D (\psi^{k+1} - \psi^k) \varphi d\Omega + \\ & + \triangle \bar{\tau} \int_D \left\{ \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle - S^k \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \\ & + \triangle \bar{\tau} \int_D \left\{ \text{div} [\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}] \right\} \varphi d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

para cada  $\varphi \in \mathbb{V}$ , sendo  $\vec{V} = v_N^n \vec{n}^n$ ,  $\vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$  e  $\bar{\delta}_a$  é o parâmetro de estabilização, dado por

$$\bar{\delta}_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\triangle \bar{\tau}^2} + \left\| [\mathbf{J}^{-1}] \vec{V} \right\|^2 \right)^{-1}, \vec{V} = v_N^n$$

ou  $\bar{\delta}_a = \frac{h_e}{2\|\mathbf{v}_N\|}$  em que  $h_e$  é o tamanho do elemento.  
Agora,

$$\operatorname{div} \left[ \left( \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right) \varphi \right] = \varphi \operatorname{div} \left[ \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right] + \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \quad (4.29)$$

Por isso

$$\varphi \operatorname{div} \left[ \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right] = \operatorname{div} \left[ \left( \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right) \varphi \right] - \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi. \quad (4.30)$$

Além disso,

$$\int_D \operatorname{div} \left[ \left( \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right) \varphi \right] d\Omega = \int_{\partial D} \varepsilon \varphi \left\langle \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}, \vec{n} \right\rangle d\Gamma = 0$$

uma vez que  $\varphi = 0$  em  $\partial D$ . Consequentemente,

$$\varphi \operatorname{div} \left[ \varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \right] = -\varepsilon \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi. \quad (4.31)$$

Assim, a forma fraca pode ser expressada como

$$\begin{aligned} \int_D \left( \psi^{k+1} - \psi^k \right) \varphi d\Omega + \triangle \bar{\tau} \int_D \varepsilon \left\langle \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}, \nabla_{\vec{x}} \varphi \right\rangle d\Omega = \\ = \triangle \bar{\tau} \int_D \left\{ S^k - \left\langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \right\rangle \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \end{aligned} \quad (4.32)$$

para cada  $\varphi \in \mathbb{V}$  em que  $\vec{V} = v_N^n \vec{n}^n$ , sendo  $\vec{n}^n = -\frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$  com  $\phi^n = \phi(\vec{x}, \tau_n)$  e  $\bar{\delta}_a$  é o parâmetro de estabilização, dado por

$$\bar{\delta}_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\triangle \bar{\tau}^2} + \left\| [\mathbf{J}^{-1}] \vec{V} \right\|^2 \right)^{-1}, \vec{V} = v_N^n$$

ou  $\bar{\delta}_a = \frac{h_e}{2\|\mathbf{v}_N\|}$  em que  $h_e$  é o tamanho do elemento e  $S^k = \operatorname{sign}(\vec{x}, \bar{\tau}_k) = \frac{\psi(\vec{x}, 0)}{\sqrt{\psi(\vec{x}, 0)^2 + \alpha_a}}$  com  $\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \tau_n)$ .

Agora, fazendo a discretização do domínio com elementos finitos,  $\Omega_e$ , obtem-se

$$\int_D \left( \psi^{k+1} - \psi^k \right) \varphi d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \psi^{k+1} - \psi^k \right) \varphi d\Omega \quad (4.33)$$

$$\int_D \varepsilon \langle \nabla_{\vec{x}} \psi^k, \nabla_{\vec{x}} \varphi \rangle d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \varepsilon \langle \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}, \nabla_{\vec{x}} \varphi \rangle d\Omega$$

e

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ S^k - \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = \\ & = \sum_e \int_{\Omega_e} \left\{ S^k - \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega \end{aligned}$$

Assumindo agora a mesma interpolação para  $\psi^{k+1}$ ,  $\psi^k$  e  $\varphi$  em cada elemento finito, como feito para  $\phi^{n+1}$ , tem-se

$$\psi^{k+1} = \vec{N} \cdot \vec{p}_e^{k+1} \quad (4.34)$$

$$\psi^k = \vec{N} \cdot \vec{p}_e^k$$

$$\varphi = \vec{N} \cdot \delta \vec{p}_e$$

$$\nabla_{\vec{x}} \varphi = [\mathbf{B}] \delta \vec{p}_e$$

$$\nabla_{\vec{x}} \psi^k = [\mathbf{B}] \vec{p}_e^k$$

e

$$\nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1} = [\mathbf{B}] \vec{p}_e^{k+1}$$

daí,

$$\int_{\Omega_e} \left( \psi^{k+1} - \psi^k \right) \varphi d\Omega = \int_{\Omega_e} \left\{ \vec{N} \cdot \left( \vec{p}_e^{k+1} - \vec{p}_e^k \right) \right\} \left( \vec{N} \cdot \delta \vec{p}_e \right) d\Omega \quad (4.35)$$

$$\int_{\Omega_e} \varepsilon \langle \nabla_{\vec{x}} \psi^{k+1}, \nabla_{\vec{x}} \varphi \rangle d\Omega = \int_{\Omega_e} \varepsilon \langle [\mathbf{B}] \vec{p}_e^{k+1}, [\mathbf{B}] \delta \vec{p}_e \rangle d\Omega$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left\{ S^k - \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle \right\} \left( \varphi + \bar{\delta}_a \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}} \varphi \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega_e} \left\{ S^k - \langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \rangle \right\} \left( \langle \vec{N}, \delta \vec{p}_e \rangle + \bar{\delta}_a \langle \vec{V}, [\mathbf{B}] \delta \vec{p}_e \rangle \right) d\Omega. \end{aligned}$$

#### 4.2.3 Montagem do problema global não-linear

Seja  $\vec{V}^{k+1}$  o vetor do conjunto de dados nodais *level set* no  $(k+1)$ -ésimo intervalo de tempo, ou seja,

$$\vec{V}^{k+1} = \cup_{e=1}^n \left\{ \vec{p}_e^{k+1} \right\} \quad (4.36)$$

e

$$\vec{V}^k = \cup_{e=1}^n \left\{ \vec{P}_e^k \right\}$$

e

$$\delta \vec{V} = \cup_{e=1}^n \left\{ \delta \vec{p}_e \right\}. \quad (4.37)$$

Assim, pela montagem global das contribuições dos elementos, obtém-se

$$\vec{F}^N = \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^N \right\} \quad (4.38)$$

$$\vec{F}^V = \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^V \right\}$$

$$\vec{F}^M = \bigwedge_e \left\{ \vec{F}_e^M \right\}$$

$$[\mathbf{K}] = \bigwedge_e [\mathbf{K}_e]$$

e

$$[\mathbf{M}] = \bigwedge_e [\mathbf{M}_e]$$

em que  $\bigwedge_e$  representa o operador vetorial de montagem,  $\bigwedge_e (\circ)$  a matriz operadora,  $\vec{F}^K$ ,  $\vec{F}^N$  e  $\vec{F}^V$  representam os vetores de forças de corpo nodais globais e  $[\mathbf{M}]$  a matriz de rigidez tangente global consistente de “massa”, e  $[\mathbf{K}]$  a matriz global de “condutividade”.

Como resultado, o problema discreto pode ser formulado como: dado  $\vec{U}^n$  e  $v_N^n \vec{V}$ ,

$$[\mathbf{M}] \vec{V}^{k+1} \cdot \delta \vec{U} + \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}] \vec{V}^{k+1} \cdot \delta \vec{U} = \vec{F}^M \cdot \delta \vec{U} + \triangle \bar{\tau} \left( \vec{F}^N + \vec{F}^V \right) \cdot \delta \vec{U} \quad (4.39)$$

para cada  $\delta \vec{U} \in R^N$ , isto é,

$$[[\mathbf{M}] + \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}]] \left\{ \vec{V}^{k+1} \right\} = \vec{F}^M + \triangle \bar{\tau} \left\{ \vec{F}^N + \vec{F}^V \right\}.$$

Consequentemente,

$$\vec{V}^{k+1} = [[\mathbf{M}] + \triangle \bar{\tau} [\mathbf{K}]]^{-1} \left\{ \vec{F}^M + \triangle \bar{\tau} \left( \vec{F}^N + \vec{F}^V \right) \right\} \quad (4.40)$$

sendo

$$[\mathbf{M}_e] = \int_{\Omega_e} \left( \vec{N} \otimes \vec{N} \right) d\Omega$$

$$[\mathbf{K}_e] = \int_{\Omega_e} \varepsilon [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}] d\Omega$$

e

$$\vec{F}^M = \lambda_e \left\{ \vec{F}_e^M \right\}, \vec{F}^N = \lambda_e \left\{ \vec{F}_e^N \right\}, \vec{F}^V = \lambda_e \left\{ \vec{F}_e^V \right\}$$

com

$$\begin{aligned} \vec{F}_e^M &= [\mathbf{K}_e] \vec{p}_e^k \\ \vec{F}_e^N &= \int_{\Omega_e} \left\{ S^k - \left\langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \right\rangle \right\} \vec{N} d\Omega \\ \vec{F}_e^V &= \int_{\Omega_e} \left\{ S^k - \left\langle \vec{w}^k, \nabla_{\vec{x}} \psi^k \right\rangle \right\} ([\mathbf{B}]^T \vec{V}) d\Omega \end{aligned}$$

e com

$$\begin{aligned} \psi^k &= \left\langle \vec{N}, \vec{p}_e^k \right\rangle \\ \nabla_{\vec{x}} \psi^k &= [\mathbf{B}]^T \vec{p}_e^k \\ S^k &= \frac{\psi^0}{\sqrt{(\psi^0)^2 + \alpha_a}} = \frac{\phi^n}{\sqrt{(\phi^n)^2 + \alpha_a}} \\ \vec{V} &= v_N^n \vec{n}^n \end{aligned} \tag{4.41}$$

sendo

$$\vec{n}^n = - \frac{\nabla_{\vec{x}} \phi^n}{\|\nabla_{\vec{x}} \phi^n\|}$$

e

$$\vec{w}^k = S^k \frac{\nabla_{\vec{x}} \psi^k}{\|\nabla_{\vec{x}} \psi^k\|}$$

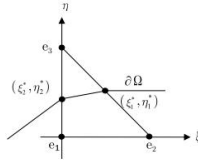
em que

$$\psi^0 = \phi^n.$$

Nota-se que a função de teste para o termo de advecção é modificada enquanto que o termo transiente permanece o mesmo como acontece no método de elementos finitos de Galerkin, que é o oposto do método *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) ((BROOKS; HUGHES, 1980)), que usa função modificada de teste para ambos os termos. Uma vantagem deste método é que a matriz de coeficientes é simétrica e constante. Desta forma, o sistema de equações (4.39) é desacoplado e resolvê-lo se torna muito econômico. Além disso, uma vez que a discretização temporal em (4.39) usa o método progressivo de Euler, ela é condicionalmente estável.

#### 4.2.4 Tratamento do problema de perda de volume

O processo de reinicialização causa perda de volume devido a difusões numéricas; assim, uma condição de contorno de Dirichlet deveria ser introduzida para corrigir o contorno, ou seja, evitar o movimento do contorno durante o processo de reinicialização. Aqui, seguindo o método apresentado em (CHESSA; SMOLINSKI; BELYTSCHKO, 2002), deduz-se as restrições para um elemento triangular de 3 nós que é interceptado pelo contorno conforme ilustrado na figura (4.3). As restrições para outros tipos de elementos podem ser deduzidas de forma análoga.



**Figura 4.3:** Elemento interceptado pelo contorno

Tipos diferentes de interseção,  $\Omega_e \cap \partial\Omega$  são possíveis. Cada interseção produz o aparecimento de alguma restrição relacionada a valores nodais da função *level set*.

##### 4.2.4.1 Definição da restrição

Para cada face que é interceptada por  $\partial\Omega_e$ , é necessário que seja satisfeita a restrição:

$$\sum_i N_i(\xi^*, \eta^*) \psi_{e_i} = 0 \quad (4.42)$$

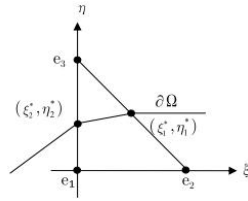
em que  $(\xi^*, \eta^*)$  são as coordenadas naturais da interseção conforme ilustrado em (4.4).

Na realidade, as funções de forma  $N_1(\xi^*, \eta^*)$  e  $N_2(\xi^*, \eta^*)$ , por exemplo, interpolam a função *level set* na face [1], de modo que

$$N_1(\xi^*, \eta^*) \psi_{e_1} + N_2(\xi^*, \eta^*) \psi_{e_2} = 0 \quad (4.43)$$

Portanto, a submatriz  $[\mathbf{G}(K, \circ)]$ , correspondente à  $k$ -ésima linha, é dada neste caso por

$$[\mathbf{G}(K, \circ)] = [0, \dots, 0, N_1(\xi^*, \eta^*), 0, \dots, 0, N_2(\xi^*, \eta^*), 0, \dots, 0] \quad (4.44)$$

**Figura 4.4:** Interpolação na face [1]

em que  $N_1(\xi^*, \eta^*)$  está na  $e_1$ -ésima posição e  $N_2(\xi^*, \eta^*)$  está na  $e_2$ -ésima posição.

A matriz  $[\mathbf{G}]$  é do tipo  $(M \times N)$ , em que  $M$  é o número total de restrições e  $N$  é o número total de nós da malha que não estão no contorno  $\partial\Omega$ . Assim,  $N$  é dado pelo total de nós da malha menos o número total de nós no contorno  $\partial\Omega$ .

Adicionando a restrição ao sistema original de equações, obtém-se a forma final da equação discretizada de reinicialização:

$$\frac{1}{\Delta\tau} \left[ [\mathbf{M}] + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{G}^T \mathbf{G}] \right] \left\{ \vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k \right\} = \left\{ \vec{F}^K + \vec{F}^N + \vec{F}^V \right\} \quad (4.45)$$

ou seja,

$$\vec{V}^{k+1} = \vec{V}^k + \Delta\tau \left[ [\mathbf{M}] + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{G}^T \mathbf{G}] \right]^{-1} \left\{ \vec{F}^K + \vec{F}^N + \vec{F}^V \right\}$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro de penalidade, dado por um  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno.

O procedimento acima pode ser decrito pelo seguinte algoritmo:

Primeiro, considere que já foi calculado o total de intercepções feitas pela curva *level set*  $\psi = 0$ . Denote tal número por  $M$ . Então as matrizes  $[\mathbf{G}]$  são do tipo  $(M \times N)$ .

- Inicialização

- (a) Determine o número total de intercepções  $M$

- (b) Aloque memória para  $[\mathbf{G}(M, N)]$  e faça isso para zero  $[\mathbf{G}(M, N)]$ , em que  $N$  é o número total de nós de valores nodais livres da função *level set*

- Para cada elemento finito, faça:
  - (a) Determine o número total de interseções dos elementos
  - (b) Para cada dessas interseções, determine a correspondente contribuição de linha para a matriz  $[\mathbf{G}]$
  - (c) Calcule as contribuições dos elementos para  $[\mathbf{M}]$  e  $\vec{F}^K, \vec{F}^N, \vec{F}^V$
- Resolva o sistema de equações
  - (a)  $\vec{V}^{k+1} = \vec{V}^k + \triangle \tau \left[ [\mathbf{M}] + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{G}^T \mathbf{G}] \right]^{-1} \left\{ \vec{F}^K + \vec{F}^N + \vec{F}^V \right\}$  em que que ambas  $[\mathbf{M}]$  e  $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]$  são constantes, isto é, somente é necessário um procedimento de triangularização.
- Atualize
  - (a) Faça  $\vec{V}^k \leftarrow \vec{V}^{k+1}$
  - (b) Verifique a convergência (aproximação para a solução do estado estacionário)

#### 4.2.4.2 Solução de um sistema de equações lineares com restrições

Considere um sistema de equações lineares sem restrições, formulado como: determine  $\vec{x} \in R^n$  solução de

$$[\mathbf{K}] \vec{x} = \vec{R}. \quad (4.46)$$

Alternativamente, o sistema de equações pode ser formulado, como: determine  $\vec{x} \in R^n$  que minimiza

$$F(\vec{y}) = \frac{1}{2} [\mathbf{K}] \vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{R} \cdot \vec{y} \quad (4.47)$$

ou seja

$$\vec{x} = \arg \min F(\vec{y}), \forall \vec{y} \in R^n.$$

De fato, se  $\vec{x}$  é a solução para o problema de minimização, então  $\vec{x}$  satisfaz a condição necessária de otimalidade

$$\left. \frac{dF(\vec{y})}{d\vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{x}} = 0. \quad (4.48)$$



Agora,

$$\frac{dF(\vec{y})}{d\vec{y}} = [\mathbf{K}]\vec{y} - \vec{R} \quad (4.49)$$

que fornece, em  $\vec{y} = \vec{x}$ ,

$$[\mathbf{K}]\vec{x} = \vec{R}. \quad (4.50)$$

Considere agora a introdução de um conjunto de restrições lineares para o problema de minimização descrito acima. Nesse caso, o problema pode ser formulado como: determine  $\vec{x} \in R^n$  que é solução de

$$\min \{F(\vec{y}), \vec{y} \in R^n\} \quad (4.51)$$

sujeito às seguintes restrições

$$h_j(\vec{y}) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, m$$

sendo

$$F(\vec{y}) = \frac{1}{2} [\mathbf{K}]\vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{R} \cdot \vec{y}$$

e

$$G_j(\vec{y}) = \sum_{i=1}^n A_{ji} y_i.$$

O problema de minimização com restrição pode ser resolvido de forma aproximada usando o método de penalidade explícita. Nesse caso, a solução é obtida fazendo

$$\vec{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \vec{x}_\alpha \quad (4.52)$$

em que  $\vec{x}_\alpha$  é a solução de: dado  $\alpha > 0$ , determine  $\vec{x}_\alpha \in R^n$  que resolve o seguinte problema de minimização sem restrição

$$\min \{F_\alpha(\vec{y}), \forall \vec{y} \in R^n\} \quad (4.53)$$

sendo

$$F_\alpha(\vec{y}) = F(\vec{y}) + \frac{1}{2\alpha} \langle \vec{G}(\vec{y}), \vec{G}(\vec{y}) \rangle$$

e

$$F(\vec{y}) = \frac{1}{2} [\mathbf{K}]\vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{R} \cdot \vec{y}$$

em que

$$\vec{G}(\vec{y}) = [\mathbf{A}]\vec{y}.$$

Na prática, toma-se o limite e considera-se uma solução aproximada do tipo

$$\vec{x} \simeq \vec{x}_\alpha \quad (4.54)$$

para um  $\alpha$  positivo suficientemente pequeno. Entretanto, uma vez que  $\vec{x}_\alpha$  minimiza o problema de otimização, ele satisfaz a condição ótima necessária:

$$\left. \frac{dF_\alpha(\vec{y})}{d\vec{y}} \right|_{\vec{y}=\vec{x}} = 0. \quad (4.55)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{dF_\alpha(\vec{y})}{d\vec{y}} &= \frac{d}{d\vec{y}} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{K}] \vec{y} \cdot \vec{y} - \vec{R} \cdot \vec{y} \right\} \\ &\quad + \frac{d}{d\vec{y}} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \langle [\mathbf{A}] \vec{y}, [\mathbf{A}] \vec{y} \rangle \right\} \\ &= [\mathbf{K}] \vec{y} - \vec{R} + \frac{d}{d\vec{y}} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \langle [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] \vec{y}, \vec{y} \rangle \right\} \\ &= [\mathbf{K}] \vec{y} - \vec{R} + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] \vec{y} \\ &= \left[ [\mathbf{K}] + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] \right] \vec{y} - \vec{R} \end{aligned} \quad (4.56)$$

que resulta, em  $\vec{y} = \vec{x}$ ,

$$\left[ [\mathbf{K}] + \frac{1}{\alpha} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] \right] \vec{x} = \vec{R}. \quad (4.57)$$

### 4.3 Discretização da equação de estado usando o método de elementos livres de Galerkin

O objetivo é aproximar a função level set usando o método de elementos livres de Galerkin de modo a atingir um alto grau de precisão e suavidade.

Uma das principais vantagens do método de elementos livres de Galerkin é a simplicidade na construção das funções de forma, base do processo de discretização das variáveis de estado, através de uma divisão do domínio do problema em subdomínios.

As principais características do método de elementos livres de Galerkin são:

- A construção das funções base, utilizadas na construção do espaço de aproximação, a partir do método de mínimos quadrados móveis;
- Ausência da conectividade nodal pré-definida associada ao emprego de elementos;
- A utilização da formulação fraca de Galerkin na discretização do sistema de equações diferenciais.

Aqui, por simplicidade, o problema modelo será considerado sujeito a estado plano de tensão. A formulação fraca do problema modelo (ou estado) é dada por

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \int_D \mathbb{D}^*(s) \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \vec{u}) d\Omega - \\
 & - \int_D \left\{ \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \right\} h(s) d\Omega - \\
 & - \int_{\Gamma_t} \left\{ \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \right\} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{u} \right\} d\Gamma = 0,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$\forall \delta \vec{u} \in \mathbf{K}$ , e

$$(b) \quad \int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{u} \cdot \delta \vec{\lambda}_D \right\} d\Gamma = 0,$$

$\forall \delta \vec{\lambda}_D$  em  $\mathbf{H}$ , em que  $s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau)$ , com os espaços vetoriais estendidos:

$$\mathbf{K} = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in H^1(D)^d \right\}$$

e

$$\mathbf{H} = \left\{ \vec{\mu}_D \mid \vec{\mu}_D \in L^2(\Gamma_D)^d \right\}$$

(uma vez que  $\Gamma_D$  é fixado, não ocorrem mudanças no contorno), com

$$\mathbb{D}^*(s) = \rho(s) \mathbb{D}_o \tag{4.59}$$

sendo  $\mathbb{D}_o$  uma matriz constante, e

$$\rho(s) = \rho_s h(s) + \rho_i (1 - h(s))$$

com

$$\rho_s = 1 \text{ e } \rho_i = 10^{-3}.$$

Aqui, será usada a seguinte aproximação:

$$h(s) = \frac{1}{1 + e^{-\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)}} \text{ ou } h_{\varepsilon}^{GF}(s) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{9}} e^{-\left(\frac{\pi s}{3\varepsilon}\right)^2} \quad (4.60)$$

e

$$\tilde{\delta}_{\Gamma_N}(\vec{x}, \tau) = \delta(s) \|\nabla_{\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau)\|$$

com

$$\delta(s) = \frac{d}{ds} \{h(s)\} \text{ em } \vec{x} \in \Gamma_N$$

e

$$s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau)$$

para algum  $\varepsilon$  dado, por exemplo,  $\varepsilon = 2h$ , onde  $h$  é o diâmetro médio do elemento, isto é, o tamanho aproximado da malha.

#### 4.4 Discretização espacial

Para deduzir as equações discretas relacionadas com a formulação fraca do problema modelo (ou estado), aproximam-se o campo de deslocamentos  $\vec{u}$  e a função de teste  $\delta\vec{u}$  como

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n [\Phi_I(\vec{x})] \vec{u}_I \quad (4.61)$$

e

$$\delta\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{I=1}^n [\Phi_I(\vec{x})] \delta\vec{u}_I \quad (4.62)$$

com

$$[\Phi_I(\vec{x})] = \begin{bmatrix} \Phi_I(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_I(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

*Observação:* o uso da aproximação com mínimos quadrados móveis (MLS) produz funções de forma  $\Phi_I(\vec{x})$  (veja apêndice C), que não possuem a propriedade da função delta de Kronecker, isto é,

$$\Phi_I(\vec{x}_J) \neq \delta_{IJ} \quad (4.64)$$

Esta característica da função de forma com MLS resulta em

$$\vec{u}(\vec{x}_I) = \sum_{I=1}^n [\Phi_I(\vec{x}_I)] \vec{u}_I \neq \vec{u}_I \quad (4.65)$$

que significa que a condição de contorno essencial não pode ser exatamente satisfeita com a aplicação de

$$\vec{u}_I = \vec{0} \text{ para o nó } I \text{ em } \Gamma_D \equiv \Gamma_u. \quad (4.66)$$

Significa também, que  $\vec{u}_I$  não representa o deslocamento no nó  $I$ , uma vez que  $\vec{u}_I \neq \vec{u}(\vec{x}_I)$ .

O espaço de aproximação  $\mathbf{K}^h = \text{span}\{\Phi_I(\vec{x}), I = 1, \dots, n\}^d$ ,  $\mathbf{K}^h$  está contido em  $\mathbf{K}$ . Em termos de componentes, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{c} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \end{array} \right\} = \sum_{I=1}^n [\Phi_I(\vec{x})] \left\{ \begin{array}{c} u_I \\ v_I \end{array} \right\} \quad (4.67)$$

sendo

$$[\Phi_I(\vec{x})] = \left[ \begin{array}{cc} \Phi_I(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_I(\vec{x}) \end{array} \right].$$

Agora, denotando

$$\vec{U}^{gT} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n\} \quad (4.68)$$

como sendo o vetor das contribuições nodais para as componentes do deslocamento, e

$$\begin{aligned} [\Phi^g(\vec{x})] &= \left[ [\Phi_1(\vec{x})] \mid [\Phi_2(\vec{x})] \mid \dots \mid [\Phi_n(\vec{x})] \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \Phi_1(\vec{x}) & 0 & \Phi_2(\vec{x}) & 0 & \dots & \Phi_n(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_1(\vec{x}) & 0 & \Phi_2(\vec{x}) & \dots & 0 & \Phi_n(\vec{x}) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

ou seja,

$$[\Phi_I(\vec{x})] = \left[ \begin{array}{cc} \Phi_I(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_I(\vec{x}) \end{array} \right] \quad (4.70)$$

como sendo a matriz global que relaciona as componentes do deslocamento com as contribuições nodais, pode-se reescrever (4.67) como

$$\vec{u}^h(\vec{x}) = [\Phi^g(\vec{x})] \vec{U}^g. \quad (4.71)$$

em que  $\Phi^g$  é a matriz global das funções de forma.

Analogamente, tem-se que

$$\delta \vec{u}^h(\vec{x}) = [\Phi^g(\vec{x})] \delta \vec{U}^g \quad (4.72)$$

sendo

$$\delta \vec{U}^{gT} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta u_2, \delta v_2, \dots, \delta u_n, \delta v_n\}. \quad (4.73)$$

Agora, no caso do estado plano de tensão, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) &= [\mathbb{D}^*(s)] \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) \\ &= \sigma_{xx}(\vec{u}) \varepsilon_{xx}(\delta \vec{u}) + \sigma_{yy}(\vec{u}) \varepsilon_{yy}(\delta \vec{u}) + \sigma_{xy}(\vec{u}) \gamma_{xy}(\delta \vec{u}) \end{aligned} \quad (4.74)$$

sendo

$$\gamma_{xy}(\delta \vec{u}) = 2\varepsilon_{xy}(\delta \vec{u}).$$

Com a introdução dos vetores

$$\vec{\sigma}(\vec{u})^T = \{\sigma_{xx}(\vec{u}), \sigma_{yy}(\vec{u}), \sigma_{xy}(\vec{u})\} \quad (4.75)$$

e

$$\vec{\varepsilon}(\delta \vec{u})^T = \{\varepsilon_{xx}(\delta \vec{u}), \varepsilon_{yy}(\delta \vec{u}), \gamma_{xy}(\delta \vec{u})\}$$

pode-se reescrever (4.73) como

$$\vec{\sigma}(\vec{u}) = [\mathbb{D}_{PS}^*(s)] \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \quad (4.76)$$

e

$$\sigma(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) = \vec{\sigma}(\vec{u}) \cdot \vec{\varepsilon}(\delta \vec{u}).$$

No caso de problemas com estado plano de tensão, para um material elástico linear isotrópico, tem-se

$$[\mathbb{D}_{PS}^*(s)] = \rho(s) \mathbb{D}_o^{PS} \quad (4.77)$$

sendo

$$\mathbb{D}_o^{PS} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

em que  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Por outro lado, para o caso de deformação infinitesimal, o vetor

deformação  $\vec{\varepsilon}(\delta\vec{u})$  é dado por

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}(\vec{u}) &= \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx}(\vec{u}) \\ \varepsilon_{yy}(\vec{u}) \\ \gamma_{xy}(\vec{u}) \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}.\end{aligned}\quad (4.78)$$

Agora, de (4.66) e (4.77), tem-se que

$$\vec{\varepsilon}(\vec{u}(\vec{x})) = [\mathbf{B}^g(\vec{x})] \vec{U}^g \quad (4.79)$$

sendo

$$\begin{aligned}[\mathbf{B}^g(\vec{x})] &= [[\mathbf{B}_1(\vec{x})] | [\mathbf{B}_2(\vec{x})] | \dots | [\mathbf{B}_n(\vec{x})]] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \Phi_{1,x}(\vec{x}) & 0 & \Phi_{2,x}(\vec{x}) & 0 & \dots & \Phi_{n,x}(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_{1,y}(\vec{x}) & 0 & \Phi_{2,y}(\vec{x}) & \dots & 0 & \Phi_{n,y}(\vec{x}) \\ \hline \Phi_{1,x}(\vec{x}) & \Phi_{1,y}(\vec{x}) & \Phi_{2,x}(\vec{x}) & \Phi_{2,y}(\vec{x}) & \dots & \Phi_{n,x}(\vec{x}) & \Phi_{n,y}(\vec{x}) \end{array} \right]\end{aligned}$$

ou seja,

$$[\mathbf{B}_I(\vec{x})] = \left[ \begin{array}{cc} \Phi_{I,x}(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y}(\vec{x}) \\ \hline \Phi_{I,x}(\vec{x}) & \Phi_{I,y}(\vec{x}) \end{array} \right].$$

Sendo,  $[\mathbf{B}^g(\vec{x})]$  a matriz global que relaciona as componentes do deslocamento com as contribuições nodais e com as componentes de deslocamento  $\vec{U}^g$ .

Por analogia, tem-se também que

$$\vec{\varepsilon}(\delta\vec{u}) = [\mathbf{B}^g(\vec{x})] \delta\vec{U}^g \quad (4.80)$$

em que

$$[\mathbf{B}^g(\vec{x})] = [[\mathbf{B}_1(\vec{x})] | [\mathbf{B}_2(\vec{x})] | \dots | [\mathbf{B}_n(\vec{x})]]$$

com

$$[\mathbf{B}_I(\vec{x})] = \left[ \begin{array}{cc} \Phi_{I,x}(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y}(\vec{x}) \\ \hline \Phi_{I,x}(\vec{x}) & \Phi_{I,y}(\vec{x}) \end{array} \right].$$

Para descrever completamente as equações discretas relacionadas com a formulação fraca do problema modelo (ou estado), aproxima-se o campo

de multiplicadores de Lagrange  $\vec{\lambda}_D(\vec{x})$  e o campo virtual (função de teste)  $\delta\vec{\lambda}_D(\vec{x})$  como

$$\vec{\lambda}_D(\vec{x}) = \sum_{I=1}^{k_u} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{\lambda}_{D_I} \quad (4.81)$$

e

$$\delta\vec{\lambda}_D(\vec{x}) = \sum_{I=1}^{k_u} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \delta\vec{\lambda}_{D_I} \quad (4.82)$$

em que  $\bar{s}$  denota o parâmetro comprimento de arco e  $k_u$  o número total de nós no contorno  $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$ , sendo que aqui, como se está interessado em problemas 2D, o contorno será uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, como a partição do domínio será feita através de uma discretização triangular linear, o contorno será aproximado por segmentos de reta. Como consequência, tanto  $\vec{\lambda}_D(\vec{x})$  como  $\delta\vec{\lambda}_D(\vec{x})$  serão linearmente interpolados em cada segmento, usando-se elementos finitos com funções de base lineares 1D.

A interpolação acima também pode ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_D^u(\vec{x}(\bar{s})) \\ \lambda_D^v(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = \sum_{I=1}^{k_u} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{D_I}^u \\ \lambda_{D_I}^v \end{array} \right\} \quad (4.83)$$

sendo

$$[\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] = \begin{bmatrix} N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 \\ 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) \end{bmatrix}.$$

Analogamente, obtem-se

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta\lambda_D^u(\vec{x}(\bar{s})) \\ \delta\lambda_D^v(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right\} = \sum_{I=1}^{k_u} [\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] \left\{ \begin{array}{c} \delta\lambda_{D_I}^u \\ \delta\lambda_{D_I}^v \end{array} \right\} \quad (4.84)$$

sendo

$$[\mathbf{N}_I(\vec{x}(\bar{s}))] = \begin{bmatrix} N_I(\vec{x}(\bar{s})) & 0 \\ 0 & N_I(\vec{x}(\bar{s})) \end{bmatrix}.$$

Agora, denotando

$$\vec{U}^{\lambda T} = \{ \lambda_1^u, \lambda_1^v, \lambda_2^u, \lambda_2^v, \dots, \lambda_{k_u}^u, \lambda_{k_u}^v \} \quad (4.85)$$

como sendo o vetor das contribuições nodais às componentes dos multiplicadores de Lagrange e

$$[\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] = [ [\mathbf{N}_1(\vec{x}(\bar{s}))] \mid [\mathbf{N}_2(\vec{x}(\bar{s}))] \mid \dots \mid [\mathbf{N}_{k_u}(\vec{x}(\bar{s}))] ] \quad (4.86)$$



$$= \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} N_1(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & N_2(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & \dots & N_{k_u}(\vec{x}(\bar{s})) & 0 \\ 0 & N_1(\vec{x}(\bar{s})) & 0 & N_2(\vec{x}(\bar{s})) & \dots & 0 & N_{k_u}(\vec{x}(\bar{s})) \end{array} \right]$$

como sendo a matriz global que relaciona as componentes dos multiplicadores de Lagrange com as componentes nodais, pode-se reescrever (4.82) como

$$\vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{U}^\lambda. \quad (4.87)$$

Analogamente, obtém-se também

$$\delta \vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{U}^\lambda. \quad (4.88)$$

onde

$$\delta \vec{U}^{\lambda T} = \{ \delta \lambda_1^u, \delta \lambda_1^v, \delta \lambda_2^u, \delta \lambda_2^v, \dots, \delta \lambda_{k_u}^u, \delta \lambda_{k_u}^v \}. \quad (4.89)$$

#### 4.4.1 Dedução das equações discretas associadas com o problema modelo

Substituindo (4.70), (4.71), (4.78), (4.79), (4.86) e (4.87), isto é,

$$\vec{u}(\vec{x}) = [\Phi^g(\vec{x})] \vec{U}^g \quad (4.90)$$

$$\delta \vec{u}(\vec{x}) = [\Phi^g(\vec{x})] \delta \vec{U}^g$$

$$\vec{\varepsilon}(\vec{u}) = [\mathbf{B}^g(\vec{x})] \vec{U}^g$$

$$\vec{\varepsilon}(\delta \vec{u}) = [\mathbf{B}^g(\vec{x})] \delta \vec{U}^g$$

$$\delta \vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{U}^\lambda$$

e

$$\vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{U}^\lambda,$$

em cada um dos termos da equação (a) de (4.58), ou seja,

$$\int_D \mathbb{D}^*(s) \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) d\Omega \quad (4.91)$$

$$\int_D \{ \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \} h(s) d\Omega$$

$$\int_{\Gamma_t} \{ \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_u} \{ \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{u} \} d\Gamma$$

com

$$s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau),$$

resulta:

- Termo (a)  $\equiv \int_D [\mathbb{D}^*(s)] \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) d\Omega$ :

Neste caso, tem-se

$$\int_D [\mathbb{D}^*(s)] \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) d\Omega = [\mathbf{K}_{u,u}^g] \left\{ \vec{U}^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} \quad (4.92)$$

onde  $[\mathbf{K}_{u,u}^g]$  é a matriz global de rigidez, com

$$[\mathbf{K}_{u,u}^g] = \int_D [\mathbf{B}^g]^T [\mathbb{D}^*(s)] [\mathbf{B}^g] d\Omega$$

com

$$s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau).$$

- Termo (b)  $\equiv \int_D \left\{ \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \right\} h(s) d\Omega$ :

Neste caso, tem-se

$$\int_D \left\{ \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \right\} h(s) d\Omega = \vec{F}_b^g \cdot \delta \vec{U}^g$$

em que

$$\vec{F}_b^g = \int_D \left( [\Phi^g(\vec{x})]^T \vec{b} \right) h(s) d\Omega$$

com

$$s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau).$$

- Termo (c)  $\equiv \int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{u} \right\} d\Gamma$ :

No processo de otimização deste trabalho, será mantido  $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$  fixo, e definido no contorno de  $D$ . Como resultado, torna-se conhecida a posição de  $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$  e assim pode-se calcular diretamente a integral de linha. Logo, tem-se

$$\int_{\Gamma_D} \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{u} d\Gamma = [\mathbf{K}_{\lambda,u}^g] \vec{U}^\lambda \cdot \delta \vec{U}^g \quad (4.93)$$

sendo

$$[\mathbf{K}_{\lambda,u}^g] = \int_{\Gamma_D} [\Phi^g(\vec{x}(\vec{s}))]^T [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\vec{s}))] d\Gamma.$$

e

$$\left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] = \int_{\Gamma_D} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma.$$

- Termo  $(d) \equiv \int_{\Gamma_t} \{\vec{t} \cdot \delta \vec{u}\} d\Gamma$ :

Aqui, de modo análogo ao que foi feito para o termo  $(c)$ , será mantido  $\Gamma_N \equiv \Gamma_t$  fixo, e definido no contorno de  $D$ . Como resultado, torna-se conhecida a posição de  $\Gamma_N \equiv \Gamma_t$  e assim pode-se calcular diretamente a integral de linha. Logo, tem-se que

$$\int_{\Gamma_N} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} d\Gamma = \vec{F}_t^g \cdot \delta \vec{U}^g \quad (4.94)$$

sendo

$$\vec{F}_t^g = \int_{\Gamma_N} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T \vec{t} d\Gamma.$$

Agora, substituindo (4.92), (4.93) e (4.94) em (4.58), isto é,

$$\begin{aligned} (a) \int_D \mathbb{D}^*(s) \varepsilon(\vec{u}) \cdot \varepsilon(\delta \vec{u}) d\Omega - \int_D \left\{ \vec{b} \cdot \delta \vec{u} \right\} h(s) d\Omega \\ - \int_{\Gamma_t} \{\vec{t} \cdot \delta \vec{u}\} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{\lambda}_D \cdot \delta \vec{u} \right\} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.95)$$

$\forall \delta \vec{u} \in \mathbf{K}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] \left\{ \vec{U}^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} - \vec{F}_b^g \cdot \delta \vec{U}^g - \vec{F}_t^g \cdot \delta \vec{U}^g \\ + \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] \vec{U}^\lambda \cdot \delta \vec{U}^g = 0, \forall \delta \vec{U}^g \end{aligned} \quad (4.96)$$

Substituindo (4.70) e (4.87), isto é,

$$\vec{u}(\vec{x}(\bar{s})) = [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))] \vec{U}^g \quad (4.97)$$

e

$$\delta \vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] \delta \vec{U}^\lambda,$$

em cada um dos termos na equação (b) de (4.58), ou seja,

$$\int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{u} \cdot \delta \vec{\lambda}_D \right\} d\Gamma = 0, \forall \delta \vec{\lambda}_D \quad (4.98)$$

com

$$s = \tilde{\phi}(\vec{x}, \tau),$$

resulta:

- Termo  $(e) \equiv \int_{\Gamma_u} \left\{ \vec{u} \cdot \delta \vec{\lambda}_D \right\} d\Gamma$ :

Aqui, de modo análogo ao que foi feito para o termo  $(c)$ , será mantido  $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$  fixo, e definido no contorno de  $D$ . Como resultado, torna-se conhecida a posição de  $\Gamma_D \equiv \Gamma_u$  e assim, pode-se calcular diretamente a integral de linha. Logo, tem-se que

$$\int_{\Gamma_D} \vec{u} \cdot \delta \vec{\lambda}_D d\Gamma = \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \vec{U}^g \cdot \delta \vec{U}^\lambda \quad (4.99)$$

sendo

$$\left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] = \int_{\Gamma_D} [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\vec{s}))]^T [\Phi^g(\vec{x}(\vec{s}))] d\Gamma. \quad (4.100)$$

Agora, substituindo (4.99) em (4.97), tem-se

$$\left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \vec{U}^g \cdot \delta \vec{U}^\lambda = 0, \forall \delta \vec{U}^\lambda. \quad (4.101)$$

Combinando (4.95) e (4.100), obtem-se

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] \left\{ \vec{U}^g \right\} \cdot \left\{ \delta \vec{U}^g \right\} - \vec{F}_b^g \cdot \delta \vec{U}^g - \vec{F}_t^g \cdot \delta \vec{U}^g \\ & + \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] \vec{U}^\lambda \cdot \delta \vec{U}^g = 0, \forall \delta \vec{U}^g \end{aligned} \quad (4.102)$$

e

$$\left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] \vec{U}^g \cdot \delta \vec{U}^\lambda = 0, \forall \delta \vec{U}^\lambda$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] + \left[ \mathbf{K}_{u,u}^{\eta D} \right] & \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] \\ \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}^g \\ \vec{U}^\lambda \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \vec{U}^g \\ \delta \vec{U}^\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_b^g + \vec{F}_t^g \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.103)$$

$\forall \left\{ \begin{Bmatrix} \delta \vec{U}^g \\ \delta \vec{U}^\lambda \end{Bmatrix} \right\}$ , daí

$$\begin{bmatrix} \left[ \mathbf{K}_{u,u}^g \right] + \left[ \mathbf{K}_{u,u}^{\eta D} \right] & \left[ \mathbf{K}_{\lambda,u}^g \right] \\ \left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}^g \\ \vec{U}^\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_b^g + \vec{F}_t^g \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.104)$$

sendo

$$[\mathbf{K}_{u,u}^g] = \int_D [\mathbf{B}^g]^T [\mathbb{D}^*(s)] [\mathbf{B}^g] d\Omega \quad (4.105)$$

$$[\mathbf{K}_{u,u}^{\eta_D}] = \int_{\Gamma_D} \frac{1}{\eta_D} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma$$

$$[\mathbf{K}_{\lambda,u}^g] = \int_{\Gamma_D} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma$$

$$[\mathbf{K}_{u,\lambda}^g] = \int_{\Gamma_D} [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma$$

$$\vec{F}_b^g = \int_D ([\Phi^g(\vec{x})]^T \vec{b}) h(s) d\Omega \quad (4.106)$$

e

$$\vec{F}_t^g = \int_{\Gamma_N} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T \vec{t} d\Gamma$$

#### 4.4.2 Determinação das integrais de linha

Como a partição do domínio é feita com elementos lineares de triângulo, o contorno será aproximado por um segmento de reta, unindo os nós que definem a face que aproxima o contorno. Sejam dois nós definidos por  $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2})\}$ . Este segmento de reta pode ser parametrizado como

$$x(\tau) = N_1(\tau)x_{i_1} + N_2(\tau)x_{i_2} \quad (4.107)$$

e

$$y(\tau) = N_1(\tau)y_{i_1} + N_2(\tau)y_{i_2}$$

onde

$$N_1(\tau) = \frac{1-\tau}{2}$$

e

$$N_2(\tau) = \frac{1+\tau}{2}$$

com

$$\tau \in [-1, 1].$$

Como resultado disso, o vetor de posição de um ponto genérico  $\vec{p}(\tau)$ , que pertence ao segmento de reta entre os pontos  $\{(x_{i_1}, y_{i_1}), (x_{i_2}, y_{i_2})\}$ , pode ser expresso como

$$\vec{r}(\tau) = x(\tau)\vec{e}_x + y(\tau)\vec{e}_y. \quad (4.108)$$

O comprimento de arco  $d\bar{s}$  associado ao vetor  $d\vec{r}$  é dado por

$$d\bar{s} = \|d\vec{r}\| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}. \quad (4.109)$$

Por outro lado, tem-se

$$d\vec{r} = \left\{ \frac{dx}{d\tau} \vec{e}_x + \frac{dy}{d\tau} \vec{e}_y \right\} d\tau \quad (4.110)$$

que fornece

$$d\bar{s} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau, \quad (4.111)$$

em que as derivadas de  $x(\tau)$  e  $y(\tau)$  com respeito a  $\tau$  são dadas por

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x_{i_2} - x_{i_1}}{2} \quad (4.112)$$

e

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{2}.$$

Consequentemente, o comprimento de arco é então determinado por

$$d\bar{s} = \sqrt{\left(\frac{x_{i_2} - x_{i_1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_{i_2} - y_{i_1}}{2}\right)^2} d\tau = \frac{L}{2} d\tau \quad (4.113)$$

em que  $L$  denota o comprimento de arco do elemento de linha.

Assim, pode-se calcular a integral de linha como

$$\vec{F}_i^g = \int_{\Gamma_N} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T \vec{r} d\bar{s} \quad (4.114)$$

$$= \sum_{le=1}^{nle^N} \int_{-1}^1 [\Phi_{l\tau_e}^g(\vec{x}(\tau))]^T \vec{r} \frac{L}{2} d\tau$$

em que  $nle^N$  denota o número total de segmentos de reta que formam o contorno  $\Gamma_N$ .

O multiplicador de Lagrange  $\vec{\lambda}_D(\vec{x}(\bar{s})) = [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T \vec{U}^\lambda$ , no segmento de reta, será dado por

$$\lambda_D^u(\vec{x}(\tau)) = N_1(\tau) \lambda_{Doi_1}^u + N_2(\tau) \lambda_{Doi_2}^u \quad (4.115)$$

e

$$\lambda_D^v(\vec{x}(\tau)) = N_1(\tau) \lambda_{Doi_1}^v + N_2(\tau) \lambda_{Doi_2}^v$$

que pode ser escrito, quando restrito ao segmento de reta, como

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \lambda_D^u(\vec{x}(\tau)) \\ \lambda_D^v(\vec{x}(\tau)) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(\tau) & 0 & N_2(\tau) & 0 \\ 0 & N_1(\tau) & 0 & N_2(\tau) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{Doi_1}^u \\ \lambda_{Doi_1}^v \\ \lambda_{Doi_2}^u \\ \lambda_{Doi_2}^v \end{Bmatrix} \quad (4.116) \\ &= [\mathbf{N}_{le}^g(\tau)] \left\{ \vec{U}_{le}^\lambda \right\} \end{aligned}$$

sendo

$$[\mathbf{N}_{le}^g(\tau)] = \begin{bmatrix} N_1(\tau) & 0 & N_2(\tau) & 0 \\ 0 & N_1(\tau) & 0 & N_2(\tau) \end{bmatrix}$$

e  $\left\{ \left\{ \vec{U}_{le}^\lambda \right\} \right\}$  denota as componentes do multiplicador de Lagrange no segmento de reta

Consequentemente

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_D} \vec{u} \cdot \delta \vec{\lambda}_D d\Gamma &= \int_{\Gamma_D} [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma \quad (4.117) \\ &= \sum_{le=1}^{nle^D} \int_{-1}^1 [\mathbf{N}_{le}^g(\tau)]^T [\Phi_{le}^g(\vec{x}(\tau))] \frac{L}{2} d\tau \end{aligned}$$

onde  $nle^D$  denota o número total de segmentos de reta que formam o contorno  $\Gamma_D$ .

Consequentemente, o problema discreto associado à solução da equação de estado consiste em determinar  $\left\{ \vec{U}^g, \vec{U}^\lambda \right\}$  solução de:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{u,u}^g] & [\mathbf{K}_{\lambda,u}^g] \\ [\mathbf{K}_{u,\lambda}^g] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{U}^g \\ \vec{U}^\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}^g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.118)$$

em que

$$[\mathbf{K}_{u,u}^g] = \int_D [\mathbf{B}^g]^T [\mathbb{D}^*(s)] [\mathbf{B}^g] d\Omega \quad (4.119)$$

$$[\mathbf{K}_{\lambda,u}^g] = \int_{\Gamma_u} [\Phi^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma$$

$$\left[ \mathbf{K}_{u,\lambda}^g \right] = \int_{\Gamma_u} [\mathbf{N}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T [\boldsymbol{\Phi}^g(\vec{x}(\bar{s}))] d\Gamma$$

e

$$\vec{F}^g = \vec{F}_b^g + \vec{F}_t^g$$

com

$$\vec{F}_b^g = \int_D \left( [\boldsymbol{\Phi}^g(\vec{x})]^T \vec{b} \right) h(s) d\Omega$$

e

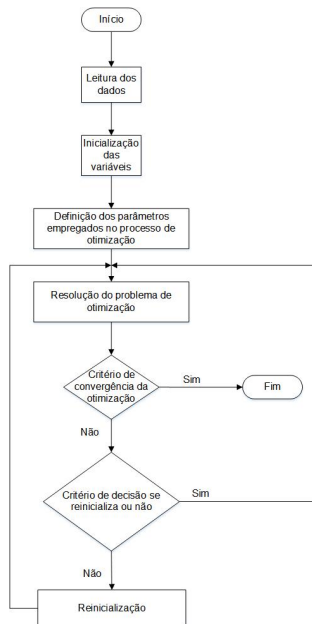
$$\vec{F}_t^g = \int_{\Gamma_t} [\boldsymbol{\Phi}^g(\vec{x}(\bar{s}))]^T \vec{t} d\Gamma$$



## 5 RESULTADOS OBTIDOS NA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações com o objetivo de avaliar o procedimento desenvolvido nos capítulos anteriores. A implementação foi feita em uma estrutura baseada em Fortran orientado a objeto, no qual alguns módulos já se encontravam desenvolvidos, e o pósprocessamento foi realizado com o uso do software GID 7.2. Para validar a formulação desenvolvida serão utilizados exemplos encontrados na literatura.

O algoritmo de otimização pode ser esquematizado conforme mostrado na figura 5.1



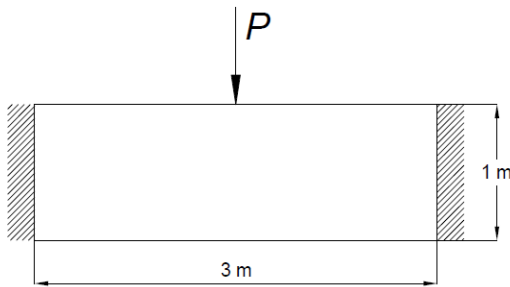
**Figura 5.1:** Fluxograma do algoritmo de otimização

Observação: critério de convergência da otimização:  $|V_N| < tol$ , critério de decisão se reinicializa ou não:  $\|\nabla\phi\| < 10$ , em que  $|V_N|$  é o módulo da velocidade normal e  $\|\nabla\phi\|$  é a norma do gradiente da função *level set*.

Cabe observar que o a topologia final depende fortemente da função *level set* inicial, uma vez que o esquema upwind não permite a criação de vazios, de modo que a topologia inicial deve apresentar vazios. Neste trabalho, usa-se vazios com geometria circular.

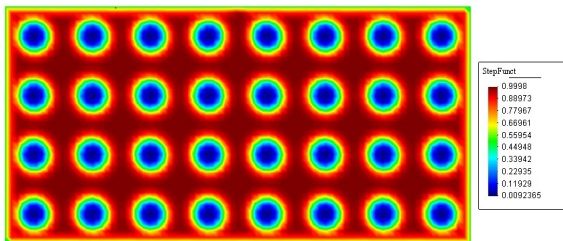
Em todos os exemplos utilizou-se estado plano de tensões com ausência de forças de corpo, mesmo material com módulo de Young  $E = 210,0$  GPa e para as regiões sem material (vazios) utilizou-se  $E = 10^{-3}$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,30$ .

Exemplo 1: A placa retangular da figura 5.2 está fixada nas laterais e submetida a um carregamento vertical para baixo  $P = 9,0 \times 10^6$  N/m no centro da face superior; inicialmente ela possui 32 vazios com geometria circular, cada um com raio de 0,1 m. Utilizou-se uma malha estruturada com 2850 nós e 5476 elementos triangulares Tri3.



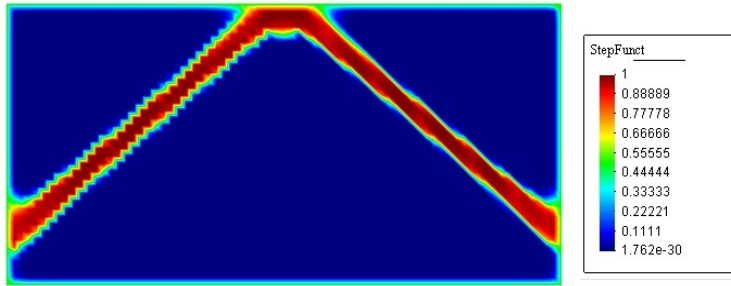
**Figura 5.2:** Exemplo 1 - Dimensões

Topologia inicial:



**Figura 5.3:** Exemplo 1 - Topologia inicial

Após 340 iterações, obteve-se a seguinte topologia:

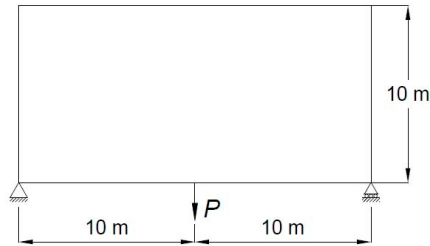


**Figura 5.4:** Exemplo 1 - Topologia final após 340 iterações

A legenda (*Step Function*) indica a densidade relativa de material, variando de zero a um, em que a ausência de material (valor zero) está representada pela cor azul, e a presença de material (valor 1) está representada pela cor vermelha. Os valores intermediários apresentam várias cores, indicando a presença fraca ou forte de material. Esta legenda será utilizada nos exemplos 2 e 3.

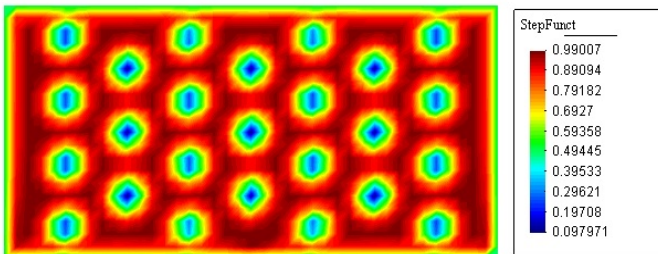
Observa-se que a configuração otimizada está em concordância com a que se encontra apresentada em (BENDSOE; SIGMUND, 2003) (página 94, item *a*). Para se obter essa topologia final utilizou-se multiplicador de Lagrange de valor 2,0. A topologia final deste exemplo não apresentou modificações quando se alterou a quantidade e posição de vazios na topologia inicial.

Exemplo 2: A placa da figura 5.5 está submetida a um carregamento vertical para baixo  $P = 10,0 \times 10^6 \text{ N/m}$  e está fixada no lado esquerdo inferior; inicialmente ela possui 25 vazios com geometria circular, cada um com raio de 0,5 m. Utilizou-se uma malha estruturada com 861 nós e 1600 elementos triangulares Tri3.



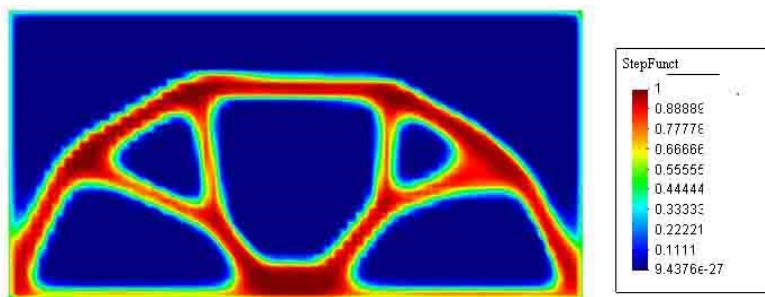
**Figura 5.5:** Exemplo 2 Dimensões

Topologia inicial:



**Figura 5.6:** Exemplo 2 - Topologia inicial

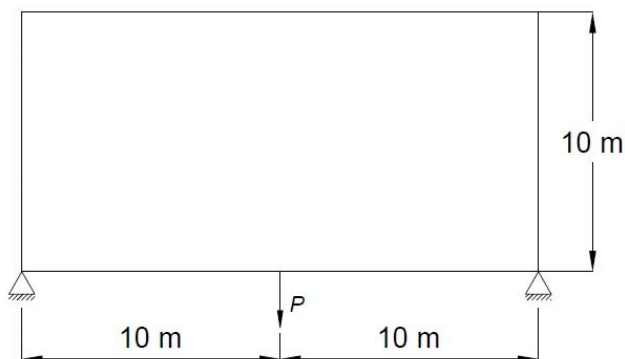
Após 226 iterações, obteve-se a seguinte topologia:



**Figura 5.7:** Exemplo 2 - Topologia final após 226 iterações

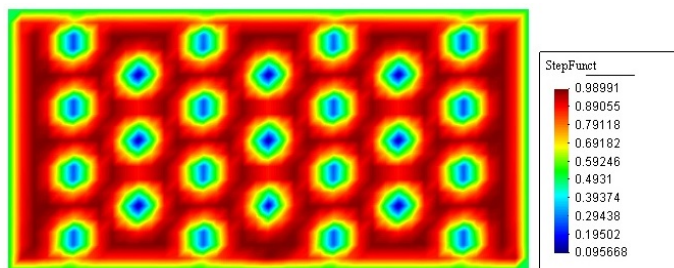
Observa-se que a configuração otimizada está em concordância com a que se encontra apresentada em (LUO et al., 2012) (página 383). Para se obter essa topologia final utilizou-se multiplicador de Lagrange de valor 1,7. A topologia final deste exemplo não apresentou modificações quando se alterou a quantidade e posição de vazios na topologia inicial.

Exemplo 3: A placa da figura 5.8 está submetida a um carregamento vertical para baixo  $P = 3,0 \times 10^6$  N/m e está fixada nos cantos inferiores; inicialmente ela possui 25 furos, cada um com diâmetro de 0,5 m. Utilizou-se uma malha estruturada com 2556 nós e 4900 elementos triangulares Tri3.



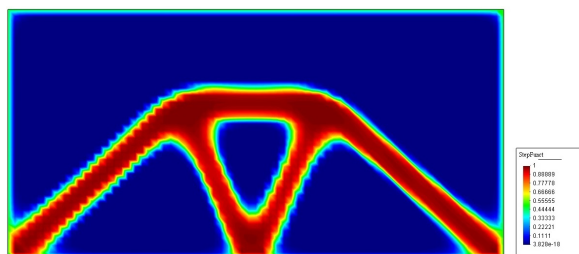
**Figura 5.8:** Exemplo 3 - Dimensões

Topologia inicial:



**Figura 5.9:** Exemplo 3 - Topologia inicial

Após 318 iterações, obteve-se a seguinte topologia:



**Figura 5.10:** Exemplo 3 - Topologia final após 318 iterações

Observa-se que a configuração otimizada está em concordância com a que se encontra apresentada em (Júnior, 2003) (página 18); considerando-se que aqui foi usado elemento Tri3 e na tese de (Júnior, 2003) usou-se elemento Tri6. Para se obter essa topologia final utilizou-se multiplicador de Lagrange de valor 1,7. A topologia final deste exemplo não apresentou modificações quando se alterou a quantidade e posição de vazios na topologia inicial.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Conclusões

O procedimento desenvolvido neste trabalho teve como objetivo a otimização topológica e de forma de estruturas elásticas lineares utilizando o método *level set*, sendo que o problema de otimização consiste na minimização da flexibilidade (*compliance*) da estrutura sujeita a restrições volumétricas. A estrutura considerada está sujeita a um estado plano de tensões e restrita a pequenas deformações e deslocamentos. Observando os leiautes obtidos depois de vários conjuntos de iterações, pode-se destacar que o método desenvolvido mostrou-se robusto e eficaz, produzindo topologias otimizadas em concordância com exemplos clássicos da literatura tais como os de (BENDSOE; SIGMUND, 2003), (LUO et al., 2012) e o de (Júnior, 2003).

No método de otimização estrutural proposto, a equação *level set* foi discretizada com respeito ao tempo, usando o método *Stream line Diffusion Finite Element Method* (SDFEM), sendo reinicializada periodicamente. Desta forma, preservou-se a característica da função distância sinalizada, representada pela equação 3.70, e simplificou-se a equação *level set*. O campo de velocidades usado para resolver a equação *level set* provou realmente ser uma direção de descida do funcional objetivo, permitindo construir um algoritmo de otimização.

Desenvolveu-se uma nova geometria baseada em um processo de reinicialização que garantiu a característica da função distância sinalizada descrita no item anterior. O processo proposto de reinicialização forneceu aderência suficiente para a função distância sinalizada, ao mesmo tempo que preservou perfeitamente os contornos da configuração.

O método *level set* mostrou flexibilidade para manipular mudanças topológicas do processo de evolução da função *level set*, unindo e cancelando os vazios definidos na topologia inicial.

A aplicação de malhas estruturadas mostrou-se mais efetiva, preservando a geometria do contorno e evitando singularidades.

### 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para desenvolvimento de trabalhos futuros, pode-se indicar a aplicação do método que foi desenvolvido com a incorporação de outros softwares comerciais e o uso de carregamentos dinâmicos no método desenvolvido neste trabalho.





## REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G. et al. Optimization by the homogenization method. *Numerische Mathematik*, v. 76, p. 27–68, 1997.
- ALLAIRE, G.; GOURNAY, F. D. *Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method*. [http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level\\_en.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level_en.html): [s.n.], 2004. Disponível em: <[http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level\\_en.html](http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo/level_en.html)>.
- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, v. 194, p. 363–393, 2004.
- ALLAIRE, G.; KOHN, R. V. Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *European Journal of Mechanics A/Solids*, v. 12, p. 839–878, 1993.
- AMBROSIO, L.; BUTTAZZO, G. An optimal design problem with perimeter penalization. *Calculus of variations and partial differential equations*, v. 1, p. 55–69, 1993.
- ANDRÉASSON, N.; EVGRAFOV, A.; PATRIKSSON, M. *An introduction to continuous optimization: foundations and fundamental algorithms*. [S.l.]: Lightning Source Incorporated, 2005. 9–10 p.
- BARTH, T. J.; SETHIAN, J. A. Numerical Schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains. *Journal of Computational Physics*, v. 145, n. 1, p. 1–40, 1998.
- BELYTSCHKO, T.; XIAO, S. P.; PARIMI, C. Topology optimization with implicitly function and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Optimization*, v. 57, p. 1177–1196, 2003.
- BENDSOE, M. P. *Methods for optimization of structural topology, shape and material*. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 1995.
- BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, methods and applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003.

- BROOKS, A.; HUGHES, T. Proc. Third International Conference on Finite Element in Fluid Flows. In: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection-dominated flows*. [S.l.: s.n.], 1980.
- BURGER, M. Lecture notes on infinite-dimensional optimization and optimal design. In: *Report 285J, University of California, Los Angeles, CA, U.S.A.*, [S.l.: s.n.], 2004.
- BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, v. 194, p. 344–362, 2004.
- CEA, J. Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *RAIRO - Modélisation et analyse numérique*, v. 3, p. 371–402, 1986.
- CHENAIS, D. On the existence of a solution in a domain identification problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 52, p. 189–289, 1975.
- CHESSA, J.; SMOLINSKI, P.; BELYTSCHKO, T. The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, v. 53, n. 8, p. 1959–1977, 2002.
- GRAVOUIL, A.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. *International Journal for Numerical Methods in engineering*, v. 53, p. 2569–2586, 2002.
- GROSS, S.; REICHELT, V.; REUSKEN, A. A finite element based level set method for two-phase incompressible flows. *Computing and Visualization in Science*, v. 9, n. 4, p. 239–257, 2006.
- HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Orlando: Academic Press, 1986.
- JÚNIOR, J. a. C. A. C. *Otimização Topológica com Refinos H-adaptativos*. 141 p. Tese (Doutorado) — UFSC, Santa Catarina, Brasil, 2003.
- LIN, C. et al. A level set characteristic Galerkin finite element method for free surface flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, v. 49, n. 5, p. 521–547, 2005.

- LUO, Z. et al. Structural shape and topology optimization using a meshless Galerkin level set method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 90, p. 369–389, 2012.
- MARCHANDISE, E.; REMACLE, J. F.; CHEVAUGEON, N. A quadrature-free discontinuous Galerkin method for the level set equation. *Journal of Computational Physics*, v. 212, n. 1, p. 338–357, 2006.
- MITCHELL, I. M. *A toolbox of level set methods*, Technical Report TR-2004-09. [S.l.], 2004.
- MOURAD, H. M.; DOLBOW, J.; GARIKIPATI, K. An assumed-gradient finite element method for the level set equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 00, p. 1–6, 2005.
- MURAT, F.; SIMON, J. *Optimization Techniques Modeling and Optimization in the Service of Man Part 2*. V.1 – VI.16 p. Tese (Doutorado) — Université Pierre et Marie Curie, Paris, França, 1976.
- ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L. *Applied functional analysis*. New York, USA: CRC Press, 1996.
- OSHER, S.; FEDKIW, R. P. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surface*. New York: Springer-Verlag, New York, 2003. 47–53 p.
- OSHER, S.; SANTOSA, F. Level-set methods for optimization problems involving geometry and constraints: frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, v. 171, p. 272–288, 2001.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. Front propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, v. 79, p. 12–49, 1988.
- PIRONNEAU, O. *Optimal shape design for elliptic systems*. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 1984.
- QUECEDO, M.; PASTOR, M. Application of the level set method to the finite element solution of two-phase flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, n. 3, p. 645–663, 2001.
- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. 4th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. 1 p.

- RAO, V. S.; HUGHES, T. J. R.; GARIKIPATI, K. On modelling thermal oxidation of Silicon II: numerical aspects. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 47, n. 1-3, p. 359–377, 2000.
- SAPIRO, G. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- SETHIAN, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. New York, USA: Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, A. Structural boundary design via Level Set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, v. 163, p. 489–528, 2000.
- SHU, L. et al. Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response. *Journal of Sound and Vibration*, v. 330, p. 5820–5834, 2011.
- SIMON, J. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, v. 2, p. 649–687, 1980.
- SOKOLOWSKI, J.; ZOLESIO, J. P. Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis. *Springer series in computational mathematics*, v. 10, 1992.
- TORNBERG, A.; ENGQUIST, B. A finite element based level-set method for multiphase flow applications. *Computing and Visualization Science*, v. 3, n. 1, p. 93–101, 2000.
- VALANCE, S. et al. A partition-of-unity-based finite element method for level sets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 76, n. 10, p. 1513–1527, 2008.
- WANG, M. Y.; WANG, X. A level-set based variational method for design and optimization of heterogeneous objects. *Computer-Aided Design*, v. 37, p. 321–337, 2005.
- WANG, M. Y.; WANG, X. M.; GUO, D. M. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 227–246, 2003.

- WANG, M. Y.; WEI, P. Topology optimization with level set method incorporating topological derivative. In: *6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Rio de Janeiro, Brazil,. [S.l.: s.n.], 2005.
- WANG, S. Y. et al. An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, v. 221, p. 395–421, 2007.
- WEBER, M.; BLAKE, A.; CIPOLLA, R. Sparse Finite Elements for Geodesic Contours with Level-Sets. In: *Proc. of the 8th European Conference on Computer Vision (ECCV'04)*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004.



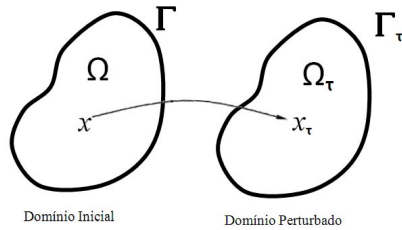
## APÊNDICE A – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PROJETO COM FORMA CONTÍNUA

A direção do gradiente da função objetivo é dada pela análise de sensibilidade à mudança de forma. Sendo assim, aqui se faz uma descrição da análise de sensibilidade em projeto com forma contínua.

### A.1 Derivada material

#### A.1.1 *Mudança de domínio e velocidade de projeto*

Considera-se um domínio  $\Omega$  em uma, duas, ou três dimensões, como mostrado esquematicamente na figura A.1. A geometria estrutural inicial  $\Omega$  muda para a nova geometria  $\Omega_\tau$  com o uso do método de parametrização do projeto.



**Figura A.1:** Perturbação de domínio induzido pelo mapeamento  $T$

Aqui, um parâmetro escalar  $\tau$  denota o quanto a forma muda em uma direção variável do projeto, onde  $\tau = 0$  representa a geometria inicial  $\Omega$ . Esta perturbação da forma pode ser considerada como um mapeamento ou transformação de  $\Omega$  em  $\Omega_\tau$ , que é denotada por  $T$ , como mostrado na figura A.1. O mapeamento  $T : \vec{x} \rightarrow \vec{y}_\tau$ ,  $\vec{x} \in \Omega$  é dado por

$$\vec{y}_\tau = T(\vec{x}, \tau) = T_\tau(\vec{x}). \quad (\text{A.1})$$

Assim,

$$\vec{x} = T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau}) \quad (\text{A.2})$$

e

$$\Omega_{\tau} = T_{\tau}(\Omega). \quad (\text{A.3})$$

O processo de deformação de  $\Omega$  para  $\Omega_{\tau}$  através do mapeamento (A.1) pode ser visto como um processo dinâmico de deformação do contínuo, com  $\tau$  fazendo o papel de tempo (do projeto). No tempo inicial  $\tau = 0$ , o domínio é  $\Omega$ , e a trajetória do ponto  $\vec{y}_{\tau} = T_{\tau}(\vec{x})$ , começando em  $\tau = 0$ , pode agora ser acompanhada. Considerando-se  $\tau$  como tempo, uma velocidade de projeto pode ser definida como

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) &\equiv \vec{v}(\vec{y}_{\tau}, \tau) \\ &= \vec{V}(x, \tau) \Big|_{\vec{x}=T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau})} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

sendo

$$\vec{V}(x, \tau) = \frac{d\vec{x}_{\tau}}{d\tau} = \frac{dT(\vec{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (\text{A.5})$$

onde a última igualdade acontece porque o ponto inicial  $\vec{x}$  não depende de  $\tau$ . Essa velocidade pode também ser expressa em termos da posição da partícula no tempo  $\tau$ . Essa velocidade pode também ser expressa em termos da posição da partícula no tempo  $\tau$ . Se se assume que  $T_{\tau}^{-1}$  existe, isto é,  $\vec{x} = T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau})$ , então a velocidade do projeto em  $\vec{y}_{\tau} = T_{\tau}(\vec{x})$ , é

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) &\equiv \vec{v}(\vec{y}_{\tau}, \tau) = \frac{d\vec{y}_{\tau}}{d\tau} \\ &= \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\vec{x}=T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau})} = \frac{\partial \vec{y}_{\tau}}{\partial \tau} \Big|_{\vec{x}=T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau})}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A trajetória da partícula do projeto que era em  $\vec{x}$  quando  $\tau = 0$  agora é definida pelo problema de valor inicial

$$\frac{d\vec{y}_{\tau}}{d\tau} = \vec{v}(\vec{y}_{\tau}, \tau) \quad (\text{A.7})$$

em que

$$\vec{y}_{\tau=0} = \vec{x}.$$



isto é,

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} dt = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau) dt \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{y}_\tau(\tau_{n+1}) = \vec{y}_\tau(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau) dt$$

Aplicando-se o método explícito de Euler, obtem-se

$$\vec{y}_\tau(\tau_{n+1}) = \vec{y}_\tau(\tau_n) + \vec{v}(\vec{y}_\tau(\tau_n), \tau_n) dt$$

com

$$\vec{y}_\tau(0) = \vec{x}.$$

Assim, se  $T$  é dado, então a velocidade  $\vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau)$  do projeto pode ser construída. Reciprocamente, se o campo de velocidades  $\vec{v}(\vec{y}_\tau, \tau)$  do projeto é dado, então o mapeamento  $T$  pode ser definido por

$$T(\vec{x}, \tau) = \vec{y}_\tau \quad (\text{A.9})$$

onde  $\vec{y}_\tau$  é a solução do problema de valor inicial, dado em (A.7).

Se a transformação  $T(\vec{x}, \tau)$  é assumida como sendo suficientemente regular na vizinhança de  $\tau = 0$ , então pode-se usar expansão em série de Taylor em torno do ponto inicial  $T(\vec{x}, 0)$  do mapeamento, como

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \tau^2 \quad (\text{A.10})$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau^n} \right|_{\tau=0} \tau^n + \dots$$

Para se desenvolver a sensibilidade de primeira ordem da forma, usa-se os dois primeiros termos da expansão da série de Taylor  $T(\vec{x}, \tau)$ . Assim, ignorando-se os demais termos de ordem superior, obtem-se a seguinte relação de mapeamento linear

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \left. \frac{\partial T(\vec{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (\text{A.11})$$

sendo

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\tau^2)}{\tau} = 0.$$

Daí

$$T(\vec{x}, \tau) = T(\vec{x}, 0) + \vec{V}(\vec{x}, 0) \tau + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (\text{A.12})$$

que pode ser aproximada por

$$\vec{y}_\tau = T(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}) \quad (\text{A.13})$$

sendo

$$\vec{V}(\vec{x}) \equiv \vec{V}(\vec{x}, 0)$$

A variação do domínio induzido por este mapeamento linear é ilustrada na figura A.1.

**Teorema A.1:** *Seja  $A \subset R^n$  um conjunto aberto e seja, para cada  $\tau \in R$ ,  $T_\tau : A \subset R^n \rightarrow R^n$  de classe  $C^1$ . Seja, ainda,  $\vec{x}_0 \in A$  e suponha que  $J_{T_\tau}(\vec{x}_0) \neq 0$ , onde*

$$J_{T_\tau}(\vec{x}_0) = \det [DT_\tau(\vec{x}_0)] = \det [\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}_0)] \quad (\text{A.14})$$

e

$$[DT_\tau(\vec{x}_0)] = \frac{\partial \vec{y}_\tau(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}} = \nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}_0)$$

com

$$\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x}).$$

Então existem uma vizinhança  $U$  de  $\vec{x}_0$  em  $A$  e um conjunto aberto  $W$  de  $T_\tau(\vec{x}_0)$  tal que  $T_\tau(U) = W$  e  $T_\tau(\cdot)$  possui uma inversa  $T_\tau^{-1} : W \rightarrow U$  de classe  $C^1$ . Além disso, para  $\vec{y}_\tau \in W$ ,  $\vec{x} = T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)$ , tem-se

$$[DT_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)] = [DT_\tau(\vec{x})]^{-1} \quad (\text{A.15})$$

em que

$$[DT_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)]_{ij} = \frac{\partial (\vec{x})_i}{\partial (\vec{y}_\tau)_j}$$

que pode ser escrito como

$$\left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \right]_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} = \left[ \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \right]^{-1}$$

ou na forma de componentes como

$$\left[ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \right]_{ij} = \left[ \frac{\partial \vec{y}_\tau}{\partial \vec{x}} \right]_{ij}^{-1}.$$

O gradiente da transformação  $T(\vec{x}, \tau)$  com respeito a  $\vec{x}$  é dado por

$$\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}) \equiv I + \tau \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x})$$

que pode ser escrito como

$$\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x}) \equiv F(\vec{x}, \tau) = I + \tau H(\vec{x}) \quad (\text{A.16})$$

em que

$$H(\vec{x}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}).$$

Pode-se calcular a inversa  $F(\vec{x}, \tau)^{-1}$ , dada por

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \tau)^{-1} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}_\tau} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})} \\ &= \frac{\partial T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Observa-se que

$$\vec{V}(\vec{x}, \tau) = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))$$

e

$$\frac{\partial \vec{V}(\vec{x}, \tau)}{\partial \vec{x}} = \dot{F}(\vec{x}, \tau) \quad (\text{A.18})$$

Além disso,

$$\frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))}{\partial \vec{x}} = L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) F(\vec{x}, \tau) \quad (\text{A.19})$$

Igualando-se (A.18) com (A.19) resulta

$$\dot{F}(\vec{x}, \tau) = L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) F(\vec{x}, \tau) \quad (\text{A.20})$$

sendo

$$L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = \frac{\partial \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \Big|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}.$$

Consequentemente,

$$L_{\tau}(\vec{y}_{\tau}(\vec{x})) = \dot{F}(\vec{x}, \tau) F(\vec{x}, \tau)^{-1} \quad (\text{A.21})$$

Considera-se agora o determinante de  $F(\vec{x}, \tau)$ , denotado por

$$j(\vec{x}, \tau) = \det[F(\vec{x}, \tau)], \quad (\text{A.22})$$

que aparece como uma consequência da mudança de variáveis  $\vec{y} = T(\vec{x}, \tau)$ , no elemento de volume

$$d\Omega_{\tau} = j(\vec{x}, \tau) d\Omega_0 \quad (\text{A.23})$$

em que

$$j(\vec{x}, \tau) = \det[F(\vec{x}, \tau)]$$

O objetivo agora é calcular  $\frac{dj(\vec{x}, \tau)}{d\tau}$ .

*Lema: Seja  $P$  um tensor de segunda ordem. Então, da análise tensorial, tem-se que*

$$\frac{d}{d\tau} \{\det[P(\tau)]\} = \det[P(\tau)] \operatorname{tr} \left( [\dot{P}(\tau)] [P(\tau)]^{-1} \right) \quad (\text{A.24})$$

em que

$$\dot{P}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \{P(\tau)\}.$$

Para se poder usar o Lema acima, deve-se observar-se que

$$F(\vec{x}, \tau) = I + \tau \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x}) \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{F}(\vec{x}, \tau) = \nabla_{\vec{x}} \vec{V}(\vec{x})$$

e

$$[\dot{F}(\vec{x}, \tau)] [F(\vec{x}, \tau)]^{-1} = L_{\tau}(\vec{y}_{\tau}(\vec{x}))$$

com

$$L_{\tau}(\vec{y}_{\tau}(\vec{x})) = \left. \frac{\partial \vec{y}_{\tau}(\vec{y}_{\tau})}{\partial \vec{y}_{\tau}} \right|_{\vec{y}_{\tau}=T_{\tau}(\vec{x})}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{j(\vec{x}, \tau)\} &= \frac{d}{d\tau} \{\det F(\vec{x}, \tau)\} \\ &= \det [F(\vec{x}, \tau)] \operatorname{tr} \left( [\dot{F}(\vec{x}, \tau)] [F(\vec{x}, \tau)]^{-1} \right) \\ &= j(\vec{x}, \tau) \operatorname{div} (\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

isto é,

$$\frac{d}{d\tau} \{j(\vec{x}, \tau)\} = j(\vec{x}, \tau) \operatorname{div} (\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))) \quad (\text{A.27})$$

com

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)|_{\vec{y}_\tau = T_\tau(\vec{x})}.$$

### A.1.1.1 Formula da integral de Hadamard

A fórmula fundamental (algumas vezes chamada de ‘fórmula de Hadamard’) que permite calcular a maioria das derivadas é a seguinte:

**Teorema A.2.** *Seja  $\Omega_0$  um domínio de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^N$  e  $V$  em um espaço vetorial de classe  $C^1$ . Seja  $f$  uma função no espaço de classe  $C^1((0, \infty), C^0(\Omega_\tau)) \cap C^0((0, \infty), C^1(\Omega_\tau))$ . Então o funcional definido por*

$$\begin{aligned} J_1(f_\tau, \Omega_\tau) &= \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau \\ \text{sendo} \\ \vec{y}_\tau &= T_\tau(\vec{x}) = T(\vec{x}, \tau) = \vec{x} + \tau \vec{V}(\vec{x}) \\ \text{com} \\ \vec{V}(\vec{x}) &= \vec{V}(T_\tau^{-1}(\vec{y}_\tau)) = \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

é diferenciável e sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{J_1(f_\tau, \Omega_\tau)\} &= \int_{\Omega_\tau} \left\{ \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div} [f(\tau, \vec{y}_\tau) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] \right\} d\Omega_\tau = \\ &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x})) j_\tau(\vec{x}) d\Omega_0 \\ \text{onde} \\ j_\tau(\vec{x}) &= j(\vec{x}, \tau) = \det [\nabla_{\vec{x}} T_\tau(\vec{x})] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_0} f(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x})) j_\tau(\vec{x}) d\Omega_0 = \\ &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle + f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div} [\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] d\Omega_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Aqui, fez-se uso de

$$\operatorname{tr}(L_\tau(\vec{y}_\tau)) = \operatorname{tr}(\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) = \operatorname{div} [\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)] \quad (\text{A.32})$$

e notando-se que

$$\operatorname{div}(f_\tau \vec{v}_\tau) = f_\tau \operatorname{div}(\vec{v}_\tau) + \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau \cdot \vec{v}_\tau \quad (\text{A.33})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau &= \int_{\Omega_\tau} \left\{ \frac{\partial f(\vec{y}_\tau, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}(f_\tau \vec{v}_\tau) \right\} d\Omega_\tau = \\ &= \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f(\vec{y}_\tau, \tau)}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau \vec{v}_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

isto é,

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau = \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial f(\vec{y}_\tau, \tau)}{\partial \tau} d\Omega_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau \vec{v}_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau \quad (\text{A.35})$$

A fórmula acima pode, naturalmente, ser usada para calcular derivadas de segunda ordem. A fórmula para funcionais definidos na fronteira é dada pelo

**Teorema A.3** *Seja  $\Omega_0$  um domínio de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^N$  e  $V$  em um espaço vetorial de classe  $C^2$ . Seja  $f$  uma função no espaço de classe  $C^1((0, \infty), C^0(\Omega_\tau)) \cap C^0((0, \infty), C^1(\Omega_\tau))$ . Então o funcional definido por*

$$J_2(f_\tau) = \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau \quad (\text{A.36})$$

é diferenciável e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{J_2(f_\tau, \Omega_\tau)\} &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} dA_\tau \\ &+ \int_{\partial\Omega_\tau} \left( H_\tau(\vec{y}_\tau) f(\tau, \vec{y}_\tau) + \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \vec{n}_\tau} \right) \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \cdot \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

sendo

$$H_\tau(\vec{y}_\tau) = \text{div}[\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)].$$

em que  $H_\tau(\vec{y}_\tau)$  é a curvatura principal da fronteira no ponto  $\vec{y}_\tau$  e  $\frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \vec{n}_\tau} = \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f, \vec{n}_\tau \rangle$  é a derivada usual normal.

De fato,

$$DJ_2(f, \Omega_0) \left[ \vec{V} \right] = \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau \Big|_{\tau=0} \quad (\text{A.38})$$

Para deduzir o teorema acima, primeiro deve-se deduzir a relação entre elementos de área. Considere as relações

$$\vec{n}_\tau dA_\tau = j_\tau (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o dA_o \quad (\text{A.39})$$

e

$$\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\tau = 1 \quad (\text{A.40})$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \vec{n}_\tau dA_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau &= \vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\tau dA_\tau^2 \\ &= j_\tau^2 \left\| (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\| dA_o^2 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, tem-se

$$dA_\tau = j_\tau \left\| (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\| dA_o \quad (\text{A.42})$$

Assim,

$$\vec{n}_\tau j_\tau \left\| [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \right\| dA_o = j_\tau [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o dA_o \quad (\text{A.43})$$

isto é,

$$\vec{n}_\tau = \frac{[F_\tau^{-T}] \vec{n}_o}{\left\| [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \right\|} \quad (\text{A.44})$$

Entretanto

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_o} \left\{ f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right\} dA_o \\
 &= \int_{\partial\Omega_o} \frac{d}{d\tau} \{ f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) \} j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| dA_o \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) \frac{d}{d\tau} \{ j_\tau(\vec{x}) \} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| dA_o \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left( \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right) dA_o \\
 &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{ f_\tau(\vec{y}_\tau) \} dA_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_o} f(\vec{y}_\tau(\vec{x}), \tau) j_\tau(\vec{x}) \left( \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \right) dA_o
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 &= \frac{d}{d\tau} \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o \right\rangle \\
 &= 2 \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, \frac{d}{d\tau} \left\{ (F_\tau^{-1})^T \right\} \vec{n}_o \right\rangle \quad (\text{A.45})
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$F_\tau^T F_\tau^{-T} = I \quad (\text{A.46})$$

Dai,

$$\frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} + F_\tau^T \frac{dF_\tau^{-T}}{d\tau} = 0 \quad (\text{A.47})$$

ou seja,

$$\frac{dF_\tau^{-T}}{d\tau} = -F_\tau^{-T} \frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} \quad (\text{A.48})$$

resultando

$$\frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 = -2 \left\langle (F_\tau^{-1})^T \vec{n}_o, \frac{d}{d\tau} \left[ F_\tau^{-T} \frac{dF_\tau^T}{d\tau} F_\tau^{-T} \right] \vec{n}_o \right\rangle \quad (\text{A.49})$$



Mas

$$\frac{dF_\tau}{d\tau} = [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] F_\tau \quad (\text{A.50})$$

Assim,

$$\frac{dF_\tau^T}{d\tau} = F_\tau^T [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))]^T \quad (\text{A.51})$$

então

$$\frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2 = 2 \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| &= - \frac{\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \rangle}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|} \\ &= - \frac{\langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o, [F_\tau^{-T}] \vec{n}_o \rangle}{\left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\|^2} \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \\ &= - \langle [L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x}))] \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

entretanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f_\tau(\vec{y}_\tau)\} dA_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\ &\quad - \int_{\Omega_0} f_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \langle L_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau(\vec{x})) \rangle j_\tau(\vec{x}) \left\| [F_\tau(\vec{x})]^{-T} \vec{n}_o(\vec{x}) \right\| dA_o \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f_\tau(\vec{y}_\tau)\} dA_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) dA_\tau \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau) \langle L_\tau(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f_\tau(\vec{y}_\tau)}{\partial \tau} dA_\tau + \int_{\partial\Omega_\tau} \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} f_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle dA_\tau \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\tau} f(\vec{y}_\tau, \tau) \{ \operatorname{div}(\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau)) - \langle L_\tau(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau), \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \rangle \} dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Entretanto, ao assumir o campo de velocidade do tipo

$$\vec{v}_\tau(\vec{y}_\tau) = v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) \vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau) \quad (\text{A.56})$$

obtem-se

$$\operatorname{div}(\vec{v}_\tau) - \langle [L_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = \operatorname{div}(v_{\tau_n} \vec{n}_\tau) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} (v_{\tau_n} \vec{n}_\tau)] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle \quad (\text{A.57})$$

mas

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi_\tau \vec{u}_\tau) &= \operatorname{grad}[\phi_\tau] \cdot \vec{u}_\tau + \phi_\tau \operatorname{div}(\vec{u}_\tau) \\ e \\ \operatorname{grad}[\phi_\tau \vec{u}_\tau] &= \vec{u}_\tau \otimes \operatorname{grad}[\phi_\tau] + \phi_\tau \operatorname{grad}(\vec{u}_\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

daí

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v_{\tau_n} \vec{n}_\tau) &= \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} \cdot \vec{n}_\tau + v_{\tau_n} \operatorname{div}(\vec{n}_\tau) \\ e \\ \nabla_{\vec{y}_\tau} [v_{\tau_n} \vec{n}_\tau] &= \vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau] \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

resultando

$$\operatorname{div}(v_{\tau_n}) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{v}_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = \operatorname{div}(v_{\tau_n} \vec{n}_\tau) - \langle [\vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle \quad (\text{A.60})$$

mas, por definição, tem-se que

$$\{\vec{n}_\tau\}_i \{\vec{n}_\tau\}_i = 1 \quad (\text{A.61})$$

Então

$$\frac{\partial}{\partial \{\vec{y}_\tau\}_j} (\{\vec{n}_\tau\}_i \{\vec{n}_\tau\}_i) = 0 \quad (\text{A.62})$$

ou seja,

$$\{\vec{n}_\tau\}_i \frac{\partial \{\vec{n}_\tau\}_i}{\partial \{\vec{y}_\tau\}_j} = 0 \quad (\text{A.63})$$

que pode ser escrita na forma compacta como

$$[\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]^T \vec{n}_\tau = 0 \quad (\text{A.64})$$

Além disso,

$$\langle [\vec{n}_\tau \otimes \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n} + v_{\tau_n} [\nabla_{\vec{y}_\tau} \vec{n}_\tau]] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}, \vec{n}_\tau \rangle$$

tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v_\tau) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} v_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle &= \operatorname{div}[v_{\tau_n} \vec{n}_\tau] - \langle \nabla_{\vec{y}_\tau} v_{\tau_n}, \vec{n}_\tau \rangle \\ &= v_{\tau_n} \operatorname{div}[\vec{n}_\tau] \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

isto é,

$$\operatorname{div}(\vec{v}_\tau) - \langle [\nabla_{\vec{y}_\tau} v_\tau] \vec{n}_\tau, \vec{n}_\tau \rangle = v_{\tau_n} \operatorname{div}[\vec{n}_\tau] \quad (\text{A.66})$$

para um campo de velocidade do tipo

$$\vec{v}_\tau = v_{\tau_n} \vec{n}_\tau$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{d}{d\tau} \{f(\vec{y}_\tau, \tau)\} dA_\tau + \\ &+ \int_{\partial\Omega_\tau} f(\vec{y}_\tau, \tau) v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) \operatorname{div}[\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)] dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

então, denotando

$$H_\tau(\vec{y}_\tau) = \operatorname{div}[\vec{n}_\tau(\vec{y}_\tau)] \quad (\text{A.68})$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\partial\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) dA_\tau &= \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{\partial f}{\partial \tau}(\vec{y}_\tau, \tau) dA_\tau + \\ &+ \int_{\partial\Omega_\tau} \left\{ \frac{\partial f_\tau}{\partial \vec{n}_\tau} + f(\vec{y}_\tau, \tau) H_\tau(\vec{y}_\tau) \right\} v_{\tau_n}(\vec{y}_\tau) dA_\tau \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

### A.1.2 Derivadas clássicas

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  com contorno  $\Gamma = \partial\Omega$ , domínio  $\Omega_\tau = T_\tau(\Omega)$  e a função conhecida  $f(\tau, \vec{y}_\tau)$  definida em uma vizinhança de  $\bigcup_{\tau \in [0, t]} \Omega_\tau$  e de  $[0, t]$ .

Agora, denotando  $f_{\tau}(\vec{y}_{\tau}) = f(\tau, \vec{y}_{\tau})$  e

$$j_1(\Omega_{\tau}) = J_1(\Omega_{\tau}, f_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Omega_{\tau}$$

e

$$j_2(\Omega_{\tau}) = J_2(\Omega_{\tau}, f_{\tau}) = \int_{\Gamma_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Gamma_{\tau}.$$

Considere  $\Omega_{\tau}$ ,  $f_{\tau}(\vec{y}_{\tau})$  e  $T_{\tau}(\vec{x})$  como sendo suficientemente regular, obtem-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \{j_1(\Omega_{\tau})\} \right|_{\tau=0} &= DJ_1(\Omega_{\tau}, f_{\tau})[V(\vec{x})] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Omega_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Omega_{\tau} \right\} \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega} \left. \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_{\tau})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} d\Omega + \int_{\Gamma} f(\vec{x}, 0) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial f(0, \vec{x})}{\partial \tau} d\Omega + \int_{\Gamma} f(\vec{x}, 0) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \{j_2(\Omega_{\tau})\} \right|_{\tau=0} &= DJ_2(\Omega_{\tau}, f_{\tau})[V(\vec{x})] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_{\tau}} f(\tau, \vec{y}_{\tau}) d\Gamma_{\tau} \right\} \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Gamma} \left. \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_{\tau})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} d\Gamma + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial f(\vec{x}, 0)}{\partial n} + H(\vec{x}, 0) f(\vec{x}, 0) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial f(0, \vec{x})}{\partial \tau} d\Gamma + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial f(\vec{x}, 0)}{\partial n} + H(\vec{x}, 0) f(\vec{x}, 0) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \end{aligned}$$

Aqui, pode-se considerar dois casos particulares, que são:

•o caso em que

$$\begin{aligned} f_o(\vec{x}) &= f(\tau, \vec{y}_{\tau})|_{\vec{y}_{\tau}=T_{\tau}(\vec{x})} \\ &= f(\tau, \vec{y}_{\tau}) \circ T_{\tau}(\vec{x}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(\tau, \vec{y}_{\tau}) = f_o(\vec{x})|_{\vec{x}=T_{\tau}^{-1}(\vec{y}_{\tau})}$$

para cada  $\tau \geq 0$ . Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \{ \tilde{f}(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x})) \} &= \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(\tau + d\tau, \vec{y}_{\tau+d\tau}(\vec{x})) - \tilde{f}(\tau, \vec{y}_\tau(\vec{x}))}{d\tau} \\ &= \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{f_o(\vec{x}) - f_o(\vec{x})}{d\tau} \\ &= 0 \end{aligned}$$

assim, como  $f(\tau, \vec{y}_\tau)$  e  $T_\tau(\vec{x})$  são contínuas para cada  $\tau$  fixado,

$$\frac{d}{d\tau} \{ f(\tau, \vec{y}_\tau) \} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{f(\tau + d\tau, \vec{y}_{\tau+d\tau}) - f(\tau, \vec{y}_\tau)}{d\tau} = 0$$

daí

$$\frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \vec{y}_\tau} \cdot \frac{d\vec{y}_\tau}{d\tau} = 0$$

•no caso em que

$$\left. \frac{\partial f(\tau, \vec{y}_\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0$$

tem-se

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \{ j_1(\Omega_\tau) \} \right|_{\tau=0} &= DJ_1(\Omega_\tau, f_\tau)[V(\vec{x})] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Omega_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Omega_\tau \right\} \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Gamma} f(\vec{x}, 0) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\tau} \{ j_2(\Omega_\tau) \} \right|_{\tau=0} &= DJ_2(\Omega_\tau, f_\tau)[V(\vec{x})] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \int_{\Gamma_\tau} f(\tau, \vec{y}_\tau) d\Gamma_\tau \right\} \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial f(\vec{x}, 0)}{\partial n} + H(\vec{x}, 0) f(\vec{x}, 0) \right\} \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) d\Gamma \end{aligned}$$



## APÊNDICE B – TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Este apêndice tem como objetivo apresentar um resumo dos principais conceitos de análise funcional que foram utilizados nesta dissertação.

### B.1 Introdução aos operadores não lineares

Sejam os espaços reais  $U$  e  $V$  de Banach, cujas normas são denotadas por  $\|\cdot\|_U$  e  $\|\cdot\|_V$  respectivamente, e seja  $P$  uma função com domínio em  $U$  e contradomínio em  $V$ , e seja, ainda,  $P$  um operador de  $U$  em  $V$  tal que  $P : U \rightarrow V$ . No caso especial em que  $V$  é igual a  $\mathbb{R}$ , tal operador é denominado funcional. (ODEN; DEMKOWICZ, 1996)

Um operador  $P : U \rightarrow V$  é chamado de homogêneo se

$$P(\alpha u) = \alpha P(u) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u \in U \quad (\text{B.1})$$

e aditivo se

$$P(u + v) = P(u) + P(v) \text{ para todo } u \text{ e } v \text{ de } U. \quad (\text{B.2})$$

O operador é linear se ele for simultaneamente homogêneo e aditivo, caso contrário,  $P$  é não linear.

O operador  $P : U \rightarrow V$  é chamado de contínuo no ponto  $u_o \in U$  se

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0, \|u - u_o\|_U < \delta \rightarrow \|P(u) - P(u_o)\|_V < \varepsilon). \quad (\text{B.3})$$

Equivalentemente,  $P$  é contínuo em  $u_o \in U$  se, para cada sequência  $\{u_n\}$  convergindo para  $u_o$  em  $U$ , implicar que  $P(u_n)$  converge para  $P(u_o)$  em  $V$ , ou seja,  $P$  é contínuo se

$$\|u_n - u_o\|_U \rightarrow 0 \text{ implica que } \|P(u_n) - P(u_o)\|_V \rightarrow 0. \quad (\text{B.4})$$

Se (B.3) for verdadeira para pares de elementos  $(u, u_o)$  em algum conjunto  $S \subset U$ , então  $P$  é uniformemente contínuo em  $S$ .

Um conjunto  $S \subset U$  é sequencialmente compacto se cada sequência infinita de  $S$  contiver uma subsequência convergente. Tais conjuntos compactos são necessariamente fechados, e os espaços métricos  $(S, d)$  associados a eles são completos e totalmente limitados.

Se um operador  $P$  mapeia um conjunto limitado  $S \subset U$  em um conjunto compacto em  $V$ , então  $P$  é chamado de compacto em  $S$ , e se  $P$  for si-

multaneamente contínuo e compacto em  $S$ , ele é chamado de completamente contínuo em  $S$ .

### B.1.1 Operadores não lineares

Se  $P : U \rightarrow V$  é não linear, e

$$\|P(u) - P(v)\|_V \leq M \|u - v\|_U \text{ para cada } u \text{ e } v \in S \subset U \quad (\text{B.5})$$

diz-se que  $P$  satisfaz uma condição Lipschitz em  $S$ , com uma constante Lipschitz  $M$ , e quando tal condição é satisfeita, é fácil verificar que  $P$  é contínua em  $S$ .

### B.1.2 Operadores lineares

Um operador linear  $A : U \rightarrow V$  é dito limitado se existe uma constante positiva  $M < +\infty$  tal que

$$\|A(u)\|_V \leq M \|u\|_U, \text{ para todo } u \in U. \quad (\text{B.6})$$

Daí,

$$\frac{\|A(u)\|_V}{\|u\|_U} \leq M, \text{ para todo } u \in U. \quad (\text{B.7})$$

Se  $P$  é um operador linear de  $U$  em  $V$ ,  $U$  e  $V$  sendo espaços de Banach, e se  $P$  é limitado, então ele é necessariamente contínuo. De fato, o conjunto  $L(U, V)$  de todos os operadores lineares de  $U$  em  $V$  também é um espaço linear normado, e atribui-se a qualquer operador linear  $A \in L(U, V)$  a norma

$$\|A\|_{L(U, V)} = \sup_{u \in U} \frac{\|A(u)\|_V}{\|u\|_U}, \text{ para } \|u\|_U \neq 0. \quad (\text{B.8})$$

### B.1.3 Funcionais - $L(U, \mathbb{R})$

Um exemplo de  $L(U, V)$  de especial importância acontece no caso de  $V = \mathbb{R}$ , isto é,  $L(U, \mathbb{R})$ . O espaço dos funcionais lineares contínuos em  $U$  ocorre no espaço dual de  $U$ , que é denotado por  $U'$  :

$$U' = L(U, \mathbb{R}), U' \text{ dual de } U. \quad (\text{B.9})$$



Para descrever  $l \in U'$ , frequentemente se usa a notação

$$l(u) = \langle l, u \rangle \in \mathbb{R} \quad (\text{B.10})$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é usado para descrever uma paridade de dualidade em  $U' \times U$ ; ou seja,  $\langle l, u \rangle$  é visto como um mapeamento bilinear de  $U' \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . De fato, como  $l \in U' = L(U, \mathbb{R})$ , tem-se que

$$\begin{aligned} l(u + \alpha v) &= l(u) + \alpha l(v) \\ &= \langle l, u \rangle + \alpha \langle l, v \rangle, \forall u \text{ e } v \in U \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Além disso, como  $L(U, \mathbb{R})$  em um espaço linear,  $\alpha l_1 + l_2 \in L(U, \mathbb{R})$ . Daí, dado  $u \in U$

$$\begin{aligned} [\alpha l_1 + l_2](u) &= \alpha l_1(u) + l_2(u) \\ &= \alpha \langle l_1, u \rangle + \langle l_2, u \rangle, \forall l_1 \text{ e } l_2 \in U' \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Agora, como por definição

$$[\alpha l_1 + l_2](u) = \langle \alpha l_1 + l_2, u \rangle \quad (\text{B.13})$$

igualando-se (B.12) com (B.13), obtem-se

$$\langle \alpha l_1 + l_2, u \rangle = \alpha \langle l_1, u \rangle + \langle l_2, u \rangle, \forall l_1 \text{ e } l_2 \in U' \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.14})$$

Como resultado de (B.11) e de (B.14) pode-se concluir que  $\langle l, u \rangle$  de fato é um mapeamento linear de  $U' \times U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Observa-se que

$$l(u) = \langle l, u \rangle \leq |\langle l, u \rangle|$$

e

$$\|l\|_{L(U, \mathbb{R})} = \sup_{u \in U} \frac{|l(u)|}{\|u\|_U}, \text{ para } \|u\|_U \neq 0$$

assim

$$\|l\|_{L(U, \mathbb{R})} \geq \frac{|l(u)|}{\|u\|_U}$$

isto é,

$$l(u) = \langle l, u \rangle \leq |\langle l, u \rangle| = |l(u)| \leq \|l\|_{L(U, \mathbb{R})} \|u\|_U.$$

Agora, no que tange aos pontos relativos à topologia fraca de  $U'$ , diz-se que uma sequência  $\{u_n\} \in U$  converge fracamente para um ponto  $u_o \in U$

se

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle l, u_n - u_o \rangle = 0, \forall l \in U'. \quad (\text{B.15})$$

Cabe aqui a observação de que seqüências que falham em convergir fortemente, isto é, que o  $\lim_{n \rightarrow 0} \|u_n - u_o\|_U = 0$  não existe, podem convergir fracamente. Entretanto, qualquer seqüência fortemente convergente necessariamente converge fracamente. De fato, como  $l \in L(U, \mathbb{R})$ , tem-se que

$$\|l\|_{U'} = \sup_{w \in U} \frac{|l(w)|}{\|w\|_U}, \text{ para } \|w\|_U \neq 0 \quad (\text{B.16})$$

assim,  $\|l\|_{U'}$  é o menor limite superior de  $\frac{|l(w)|}{\|w\|_U}$ . Daí,

$$\frac{|l(w)|}{\|w\|_U} \leq \|l\|_{U'} \quad (\text{B.17})$$

que fornece

$$|l(w)| \leq \|l\|_{U'} \|w\|_U \quad (\text{B.18})$$

Agora, fazendo  $w = u - u_n$ , obtem-se

$$|l(u - u_n)| \leq \|l\|_{U'} \|u - u_n\|_U \quad (\text{B.19})$$

consequentemente

$$\langle l, u - u_n \rangle \leq \|l\|_{U'} \|u - u_n\|_U \quad (\text{B.20})$$

assim

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle l, u - u_n \rangle \leq \|l\|_{U'} \lim_{n \rightarrow 0} \|u - u_n\|_U \quad (\text{B.21})$$

### B.1.3.1 Funcionais fracamente contínuos

Um funcional  $l: U \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ser fracamente contínuo em um ponto  $u_o \in U$  se

$$\lim_{n \rightarrow 0} l(u_n) = l(u_o) \quad (\text{B.22})$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle l, u_n \rangle = \langle l, u_o \rangle \quad (\text{B.23})$$

para qualquer seqüência  $\{u_n\}$  fracamente convergente para  $u_o$ .

### B.1.4 Continuidade dos operadores lineares

Um operador  $P:U \rightarrow V$  é fortemente (fracamente) contínuo em  $u_o \in U$  se, para qualquer sequência  $\{u_n\}$  convergindo fortemente (fracamente) para  $u_o$  implicar que a sequência  $P(u_n)$  converge fortemente (fracamente) para  $P(u_o)$ .

Em outras palavras, se  $P:U \rightarrow V$  é fracamente contínua em  $u_o \in U$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle l, u_n \rangle = \langle l, u_o \rangle, \forall l \in U' \quad (\text{B.24})$$

implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, P(u_n) \rangle = \langle g, P(u_o) \rangle, \forall g \in V', V' \text{ dual a } V.$$

Além disso, um conjunto  $S \subset U$  é fracamente compacto em  $U$  se cada sequência infinita  $\{u_n\}$  de  $S$  contiver uma subsequência que converge fracamente para um elemento  $u_o \in U$ .

#### B.1.4.1 Teorema da representação de Riesz

Para cada funcional linear  $l \in U'$  em um espaço  $U$  de Hilbert existe um único elemento  $u_l \in U$  tal que

$$l(v) = (u_l, v)_U \quad (\text{B.25})$$

e

$$\|l\|_{U'} = \|u_l\|_U$$

Aqui,  $(\cdot, \cdot)_U$  denota o produto interno em  $U$ . Como a correspondência estabelecida aqui é do tipo um-a-um, o espaço  $U'$  pode ser identificado com  $U$ , isto é,  $U'$  é isomorfo a  $U$ , e costuma-se escrever  $U = U'$ . Através do uso do Teorema da Representação de Riesz e desta correspondência, uma vez mais, pode-se concluir que todos os espaços de Hilbert são reflexivos.

#### B.1.4.2 Espaços reflexivos de Banach

Seja o espaço dos funcionais lineares contínuos no espaço dual dele mesmo. Este espaço também é linear; e é chamado de segundo espaço dual de  $U$  e denotado por  $U''$ . Em muitas situações importantes,  $U''$  pode ser associado com o espaço  $U$  original, isto é,  $(U')' = U$ . Nesse caso, refere-se a  $U$  como um espaço reflexivo de Banach.

### B.1.4.3 Espaços de Lebesgue - $L_p(\Omega)$

Seja o espaço de Lebesgue

$$L_p(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} |u|^p d\Omega < +\infty \right\} \quad (\text{B.26})$$

com a norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |u|^p d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < +\infty.$$

Aqui,  $\Omega$  é um domínio aberto limitado em  $\mathbb{R}^n$ ,  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida em  $\Omega$  cujas potências  $p$  são Lebesgue integráveis em  $\Omega$ , e  $d\Omega$  é a medida de Lebesgue.

Sabe-se que  $L_p(\Omega)$ ,  $1 < p < +\infty$ , é um espaço reflexivo de Banach. De fato, se  $u(\vec{x}) \in L_p(\Omega)$ ,  $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , a paridade de dualidade em  $L_p(\Omega)$  é representada pela integral

$$l(u) = \langle v_l, u \rangle = \int_{\Omega} v_l(\vec{x}) u(\vec{x}) d\Omega, \quad \text{para } v_l(\vec{x}) \in (L_p(\Omega))' \quad (\text{B.27})$$

### B.1.4.4 Desigualdade de Holder

Da desigualdade de Holder, tem-se que

$$\int_{\Omega} v(\vec{x}) u(\vec{x}) d\Omega \leq \|u(\vec{x})\|_{L_p(\Omega)} \|v(\vec{x})\|_{L_q(\Omega)} \quad (\text{B.28})$$

com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

assim, (B.28) sugere que

$$(L_p(\Omega))' = L_q(\Omega), \quad 1 < p < +\infty.$$

Nota-se que  $L_1(\Omega)$  não é reflexiva,

$$\|u(\vec{x})\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u| d\Omega. \quad (\text{B.29})$$

De fato,  $(L_1(\Omega))' = L_\infty(\Omega)$ , onde

$$L_\infty(\Omega) = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |u(\vec{x})|. \quad (\text{B.30})$$

#### B.1.4.5 Topologia fraca

Diz-se que uma sequência de funcionais lineares  $\{l_n\} \in U'$  converge fracamente para  $l_o \in U'$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle l_n, u \rangle = \langle l_o, u \rangle \text{ para todo } u \in U. \quad (\text{B.31})$$

**Distribuições** Considera-se que  $\Phi(\mathbb{R})$  é um espaço das funções de teste na reta real, ou seja,  $\phi(x) \in \Phi(\mathbb{R})$  se:

1.  $\phi(x) \in C_o^\infty(\Omega)$ , o espaço linear das funções infinitamente diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  com suporte compacto em  $\mathbb{R}$ . O suporte de  $\phi(x)$  é o fecho do conjunto  $K \subset \mathbb{R}$ ,  $K = \{x \mid \phi(x) \neq 0\}$ .
2. Uma sequência  $\{\phi_n(x)\} \in \Phi(\mathbb{R})$  converge para  $\phi_o(x) \in \Phi(\mathbb{R})$  se e somente se a interseção dos suportes de cada  $\phi_n(x)$  é não vazia e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d^r \phi_n(x)}{dx^r} - \frac{d^r \phi_o(x)}{dx^r} \right| = 0, \text{ para todo } r \geq 0. \quad (\text{B.32})$$

Observa-se que  $\Phi(\mathbb{R})$  é um espaço linear topológico localmente convexo, com uma topologia gerada por uma família de seminormas,

$$|\phi|_{m,K} = \sup_{K \subset \mathbb{R}} |D^m \phi| \quad (\text{B.33})$$

e que não é mensurável.

#### B.1.5 Espaço de distribuição

Uma distribuição é um funcional linear contínuo em  $\Phi(\mathbb{R})$ . Em outras palavras, o espaço das distribuições é o dual de  $\Phi(\mathbb{R})$ . Assim, por exemplo, a distribuição de Dirac,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \text{ para todo } \phi \in \Phi(\mathbb{R}) \quad (\text{B.34})$$

e a função degrau Heaviside

$$\langle H, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx, \text{ para todo } \phi \in \Phi(\mathbb{R}). \quad (\text{B.35})$$

De fato, qualquer função localmente integrável  $f$  pode "gerar" uma distribuição via integral

$$\int_0^{+\infty} f(x) \phi(x) dx. \quad (\text{B.36})$$

Mas distribuições como a de delta de Dirac não podem ser geradas por nenhuma função localmente integrável; assim, essas funções são conhecidas como distribuições singulares ou funções generalizadas.

### B.1.5.1 Derivada das distribuições

A derivada de qualquer distribuição  $q \in (\Phi(\mathbb{R}))'$  é a distribuição  $p$  tal que

$$\langle p, \phi \rangle = - \left\langle q, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle, \text{ para todo } \phi \in \Phi(\mathbb{R}). \quad (\text{B.37})$$

Distribuições possuem derivadas para todas as ordem, e a  $k$ -ésima derivada de  $q \in (\Phi(\mathbb{R}))'$  é a distribuição  $p$  dada por

$$\langle p, \phi \rangle = (-1)^k \left\langle q, \frac{d^k \phi}{dx^k} \right\rangle, \text{ para todo } \phi \in \Phi(\mathbb{R}). \quad (\text{B.38})$$

Simbolicamente, costuma-se escrever  $p = D^k q$ , e referir-se a  $p$  como a  $k$ -ésima derivada generalizada de  $q$ .

### B.1.6 Diferenciação de operadores

Seja  $U$  e  $V$  espaços lineares normados e  $P$  um operador de  $U$  em  $V$ . Seja  $\tau$  um número real pertencente a algum intervalo aberto  $I = (-\alpha, \alpha) \subset \mathbb{R}$ . Seja  $S$  um subconjunto aberto de  $U$  e  $u$  um elemento arbitrário de  $S$ . Então, se  $\eta$  é um elemento não nulo fixado de  $U$ , sempre se pode escolher  $\alpha$  tal que  $u(x) + \tau\eta(x) \in S$ . Nestas condições, a diferencial de Gâteaux do operador  $P : S \subset U \rightarrow V$  em  $u(x) \in S$  na direção de  $\eta(x) \in U$  é definida como o limite

$$dP(u; \eta) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P(u + \tau\eta) - P(u)}{\tau}. \quad (\text{B.39})$$

Esta relação também pode ser escrita como

$$P(u + \tau\eta) = P(u) + \tau dP(u; \eta) + \omega(u, \tau\eta)$$

onde

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, \tau\eta)\|_V}{\tau} = 0.$$

### B.1.6.1 Diferencial fraco de Gâteaux

Diz-se que  $P : S \subset U \rightarrow V$  tem um diferencial fraco de Gâteaux  $d_w P(u; \eta)$  em  $u$  na direção  $\eta$  se o seguinte limite existir:

$$l(d_w P(u; \eta)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} l\left(\frac{P(u + \tau\eta) - P(u)}{\tau}\right), \text{ para todo } l \in U' \text{ e } \eta \in U. \quad (\text{B.40})$$

O diferencial fraco de Gâteaux possui algumas propriedades peculiares. Ele pode não existir para algumas escolhas de  $\eta$  mas pode existir para outras. Ele é homogêneo em  $\eta$  mas não é aditivo. Ele existe em um ponto  $u \in S \subset U$  para toda escolha de  $\eta \in U$  se e só se

$$P(u + \tau\eta) - P(u) = h(u; \eta) + r(u; \eta) \quad (\text{B.41})$$

onde  $h(u; \eta)$  é homogêneo em  $\eta$  e  $\lim_{\tau \rightarrow 0} r(u; \eta) = 0$ , e se esta representação existir,  $h(u; \eta) = dP(u; \eta)$ . Enquanto que  $dP(u; \eta)$  possui "continuidade direcional", ou seja,  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|P(u + \tau\eta) - P(u)\|_V = 0$  para um  $\eta$  fixo, ele não é necessariamente contínuo em  $u$ .

Quando  $dP(u; \eta)$  é linear e contínuo em  $\eta$ , ele define para cada  $u$  um operador linear limitado em  $U$  denotado por  $\dot{P}(u)$ . Refere-se a esse operador como a derivada de Gâteaux de  $P$  em  $u$ , e  $\dot{P}(u) = dP(u; \eta)$ .

### B.1.6.2 Teorema 1

Seponha que o diferencial de Gâteaux  $dP(u; \eta)$  de um operador  $P : U \rightarrow V$  exista em alguma vizinhança  $B(u_o)$  de um ponto  $u_o \in U$ , e suponha que  $dP(u_o; \eta)$  seja contínuo em  $\eta = 0$ . Então  $dP(u_o; \eta)$  é linear em  $\eta$  se ele for contínuo em  $u$  para  $u = u_o$ .

A menos que se imponha condições mais restritas nos diferenciais de Gâteaux, tem-se a impressão que eles não oferecem uma ferramenta muito útil para o estudo dos operadores não lineares. Em primeiro lugar, parece que o diferencial de Gâteaux não conduz a uma aproximação local dos operadores

não lineares por operadores lineares, uma vez que eles não são sempre lineares em  $\eta$ , em segundo lugar, parece que uma conceituação mais satisfatória do diferencial de Gâteaux seria aquela em que funções diferenciáveis sempre são contínuas. Essas duas impressões são superadas através da introdução ligeiramente mais forte de diferenciação.

### B.1.6.3 Diferenciação de Fréchet

Sejam  $U$  e  $V$  dois espaços lineares normados e seja  $L(U, V)$  o espaço dos operadores lineares limitados de  $U$  em  $V$ . Seja  $S$  um conjunto aberto de  $U$ . Um operador  $P : S \rightarrow V$  é dito ser Fréchet diferenciável em  $u \in S$  se existir um operador contínuo  $DP(u) : U \rightarrow V$  tal que

$$P(u + \eta) = P(u) + DP(u)[\eta] + \omega(u, \eta) \quad (\text{B.42})$$

onde

$$\lim_{\|\eta\|_U \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, \eta)\|_V}{\|\eta\|_U} = 0.$$

A relação acima também pode ser escrita como

$$\lim_{\|\eta\|_U \rightarrow 0} \frac{\|P(u + \eta) - P(u) - DP(u)[\eta]\|_V}{\|\eta\|_U} = \lim_{\|\eta\|_U \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, \eta)\|_V}{\|\eta\|_U} = 0$$

O elemento  $DP(u)[\eta]$  é chamado de diferencial (forte) de Fréchet em  $u$  na direção  $\eta$  e o operador linear  $DP(u)$  é chamado de derivada (forte) de Fréchet de  $P$  em  $u$ . Pode-se usar a notação  $P'(u) = DP(u)$ .

De forma análoga,  $P : S \subset U \rightarrow V$  possui diferencial fraco de Fréchet  $\delta_w P(u; \eta)$  em  $u \in U$  na direção  $\eta$  se, para todo  $l \in U'$ ,

$$l(P(u + \eta) - P(u)) = l(\delta_w P(u; \eta)) + l(\omega(u, \eta)) \quad (\text{B.43})$$

onde

$$\lim_{\|\eta\|_U \rightarrow 0} \frac{\|l(\omega(u, \eta))\|_V}{\|\eta\|_U} = 0.$$

Nota-se que, pela definição, o diferencial de Fréchet é simultaneamente linear e contínuo em  $\eta$ .

**Teorema 2 (diferencial de Fréchet)** Seja  $P : S \subset U \rightarrow V$  Fréchet diferenciável em um conjunto aberto  $S$ . Então vale o seguinte:



1.  $P$  é contínua em  $S$ ;

2. O diferencial de Gâteaux de  $P$  existe em todo  $S$  e coincide com o diferencial de Fréchet, isto é,

$$dP(u; \eta) = \delta P(u; \eta). \quad (\text{B.44})$$

Demonstração:

(1) como  $P$  é Fréchet diferenciável então existe um operador contínuo  $DP(u) : U \rightarrow V$  tal que

$$P(u + \tau\eta) = P(u) + DP(u)[\eta] + \omega(u, \eta)$$

onde

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, \eta)\|_V}{\|\eta\|_V} = 0.$$

Assim, para  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que

$$0 < \|\eta - 0\| < \delta \rightarrow \left| \frac{\|\omega(u, \eta)\|_V}{\|\eta\|_V} - 0 \right| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\|\omega(u, \eta)\|_V < \varepsilon \|\eta\|_V.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|P(u + \eta) - P(u)\|_V &= \|DP(u)[\eta] + \omega(u, \eta)\|_V \\ &\leq \|DP(u)\|_{L(U, V)} \|\eta\|_V + \varepsilon \|\eta\|_V \\ &= (M + \varepsilon) \|\eta\|_V \end{aligned}$$

onde  $M = \|\eta\|_V$ . Observa-se que, como  $DP(u) : U \rightarrow V$  é uma transformação linear contínua, ela é limitada e sua norma é dada pelo menor limite superior.

(2) Para um  $\eta$  arbitrário, faz-se  $\alpha\eta$  e obtém-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|P(u + \alpha\eta) - P(u) - DP(u)[\alpha\eta]\|_V = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\omega(u, \alpha\eta)\|_V$$

dividindo-se ambas as expressões por  $\|\alpha\eta\|_V = |\alpha| \|\eta\|_V$  obtém-se

$$\frac{1}{\|\eta\|_V} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \frac{P(u + \alpha\eta) - P(u) DP(u)[\alpha\eta]}{\alpha} \right\|_V = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, \alpha\eta)\|_V}{\|\alpha\eta\|_V} = 0$$

daí

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| \frac{P(u + \alpha\eta) - P(u)}{\alpha} - DP(u)[\eta] \right\|_V = 0$$

que significa que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{P(u + \alpha\eta) - P(u)}{\alpha} &= dP(u; \eta) \\ &= DP(u)[\eta] \end{aligned}$$

ou seja,

$$dP(u; \eta) = DP(u)[\eta].$$

Nota-se que a parte (2) mostra que toda função diferenciável de Fréchet é função Gâteaux diferenciável. O contrário não é verdadeiro. Entretanto, o próximo teorema fornece condições suficientes para a diferenciabilidade de Gâteaux de modo a implicar na diferenciabilidade de Fréchet.

**Teorema 3** Se a derivada de Gâteaux de um operador  $P : U \rightarrow V$  existir em uma vizinhança aberta  $B(u_o)$  de um ponto  $u_o \in U$ , e se ela for contínua em  $u_o$ , então o diferencial de Fréchet existe e ele é igual ao diferencial de Gâteaux de  $P$ .

## APÊNDICE C – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS MÓVEIS

O método dos mínimos quadrados móveis é um dos métodos sem malha usado em conjunto com outro método com malha, como por exemplo método dos elementos finitos. O método dos mínimos quadrados móveis consiste na combinação da construção de funções de base e um método numérico, que no caso deste trabalho, é o método de Galerkin livre de elementos.

### C.1 Interpolante dos mínimos quadrados móveis

É uma aproximação dos mínimos quadrados móveis em que se permite que a função peso se mova baseada no ponto em que a construção é feita.

#### C.1.1 Construção de um conjunto de dados

Dado o conjunto de dados  $\{(\vec{x}_1, u_1), (\vec{x}_2, u_2), \dots, (\vec{x}_I, u_I), \dots, (\vec{x}_n, u_n)\}$ , a aproximação dos mínimos quadrados móveis (MLS)  $u^h(\vec{x})$  de uma função  $u(\vec{x})$  é definida no domínio  $\Omega$ , por:

$$u^h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\vec{x}) a_j^* = \langle \vec{p}(\vec{x}), \vec{a}^* \rangle \quad (\text{C.1})$$

em que

$$\vec{a}^* = \vec{a}^*(\vec{x})$$

ou seja,  $\vec{a}^*$  depende implicitamente de  $\vec{x}$ .

*Observações:*

- $p_j(\vec{x})$ ,  $j = 1, \dots, m$  define um conjunto de funções linearmente independentes, denotadas como funções base implícitas
- $a_j^*$ ,  $j = 1, \dots, m$  são as quantidades desconhecidas que dependem implicitamente de  $\vec{x}$  e que são determinadas pelo algoritmo de construção do conjunto de dados.

Aqui  $\vec{p}(\vec{x})^T = \{p_1(\vec{x}), p_2(\vec{x}), \dots, p_m(\vec{x})\}$  representa um armazenamento por linhas.

Um conjunto possível de funções independentes é aquele formado por monômios em coordenadas espaciais  $\vec{x}^T = \{x, y\} \in \mathbb{R}^2$ , no caso 2D. Assim,

$$p_1(\vec{x}) = 1 \quad (\text{C.2})$$

$$p_1(\vec{x}) = x$$

$$p_3(\vec{x}) = y$$

Consequentemente, uma base linear em 2D é dada por:  $\vec{p}(\vec{x})^T = \{1, x, y\}$ ,  $m = 3$ . Uma base quadrática em 2D é:  $\vec{p}(\vec{x})^T = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$ ,  $m = 6$ .

Ao contrário das clássicas aproximações de quadrados mínimos, os coeficientes  $a_j^*$  dependem implicitamente de  $\vec{x}$ . Para se determinar o conjunto de coeficientes em  $a_j^*(\vec{x})$ , força-se um dado critério, que é definido como: em qualquer ponto  $\vec{x}$ ,  $\vec{a}^*$  é calculado através da minimização da norma discreta do peso  $L_2$  dada por:

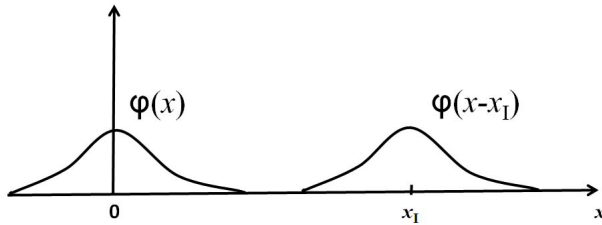
Determine em cada  $\vec{x}$ , o coeficiente  $\vec{a}^*$  tal que

$$\vec{a}^* = \arg \inf \{J(\vec{a})\}, \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^d$$

sendo

$$J(\vec{a}) = \sum_{l=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) [\langle \vec{p}(\vec{x}_l), \vec{a} \rangle - u_l]^2$$

em que  $n$  é o número de pontos na vizinhança de  $\vec{x}$  para cada função peso  $\varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) \neq 0$ , e  $u_l$  é o valor do dado em  $\vec{x} = \vec{x}_l$ . Uma função peso genérica está ilustrada na figura (C.1).

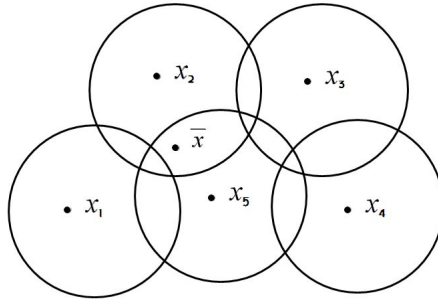


**Figura C.1:** Função peso genérica

As funções peso usualmente usadas são tais que:  $\varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) \in C_0^q(B_{r_l}(\vec{x}_l))$ , ou seja,  $\varphi(\vec{x} - \vec{x}_l)$  é definida na bola  $B_{r_l}(\vec{x}_l)$  de raio  $r_l$  e centrada em  $\vec{x}_l$ . Isto significa que  $\varphi(\vec{x} - \vec{x}_l)$  é de classe  $q$  e zero no contorno  $\partial B_{r_l}(\vec{x}_l)$ .

Essa vizinhança de  $\vec{x}_l$  é chamada de domínio de influência de  $\vec{x}_l$ , ou círculo de influência em 2D. (suporte da função peso), conforme ilustrado na

figura (C.2).



**Figura C.2:** Suporte da função peso

Note que o ponto dado  $\vec{x}$  pertence ao suporte  $\{\vec{x}_2, \vec{x}_5\}$ . Assim, em  $\vec{x}$ ,

$$J(\vec{a}) = \varphi\left(\vec{x} - \vec{x}_2\right) [\langle \vec{p}(\vec{x}_2), \vec{a} \rangle - u_2]^2 + \varphi\left(\vec{x} - \vec{x}_5\right) [\langle \vec{p}(\vec{x}_5), \vec{a} \rangle - u_5]^2. \quad (C.3)$$

### C.1.1.1 Determinação de $\vec{a}^*(\vec{x})$

A medida de erro  $J(\vec{a})$  pode ser expressa como:

$$J(\vec{a}) = \sum_{l=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) \left[ \sum_{k=1}^m p_k(\vec{x}_l) a_k - u_l \right]^2. \quad (C.4)$$

Agora, da condição necessária de otimalidade para  $\vec{a}^*$  ser um mínimo de  $J(\vec{a})$ , deve-se ter:

$$\left. \frac{\partial J(\vec{a})}{\partial a_j} \right|_{\vec{a}^*} = 2 \sum_{l=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) \left[ \sum_{k=1}^m p_k(\vec{x}_l) a_k^*(\vec{x}) - u_l \right] p_j(\vec{x}_l) = 0, \quad (C.5)$$

para  $j = 1, \dots, m$ , ou seja,

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) p_k(\vec{x}_l) p_j(\vec{x}_l) a_k^* - u_l \sum_{l=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_l) p_j(\vec{x}_l) = 0, \quad (C.6)$$

para  $j = 1, \dots, m$ . Define-se

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] = \sum_{I=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] \quad (\text{C.7})$$

e

$$\begin{aligned} [\vec{B}(\vec{x})] &= [\varphi(\vec{x} - \vec{x}_1) \vec{p}(\vec{x}_1) \quad \varphi(\vec{x} - \vec{x}_2) \vec{p}(\vec{x}_2) \quad \dots \quad \varphi(\vec{x} - \vec{x}_n) \vec{p}(\vec{x}_n)] \\ &= [\vec{B}_1(\vec{x}) \quad \vec{B}_2(\vec{x}) \quad \dots \quad \vec{B}_n(\vec{x})] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

ou

$$\vec{B}_I(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) \vec{p}(\vec{x}_I) \quad (\text{C.9})$$

portanto, pode-se escrever a relação linear como:

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] \vec{a}^* = [\vec{B}(\vec{x})] \vec{u} \quad (\text{C.10})$$

em que

$$\vec{u}^T = \{u_1, u_2, \dots, u_I, \dots, u_n\}$$

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] \vec{a}^* = \sum_{I=1}^n u_I \vec{B}_I(\vec{x}). \quad (\text{C.11})$$

Como resultado, finalmente se obtém:

$$\vec{a}^* = [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \left\{ \sum_{I=1}^n u_I \vec{B}_I(\vec{x}) \right\} \quad (\text{C.12})$$

ou, equivalentemente,

$$\vec{a}^* = \sum_{I=1}^n u_I \left( [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \vec{B}_I(\vec{x}) \right). \quad (\text{C.13a})$$

Substituindo (C.13a) em (C.1), obtém-se uma expressão para função aproximação  $u^h(\vec{x})$ , conforme se segue:

$$\begin{aligned}
u^h(\vec{x}) &= \langle \vec{p}(\vec{x}), \vec{a}^* \rangle \\
&= \sum_{I=1}^n u_I \left\langle \vec{p}(\vec{x}), [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \vec{B}_I(\vec{x}) \right\rangle \\
&= \sum_{I=1}^n u_I \Phi_I(\vec{x})
\end{aligned} \tag{C.14}$$

em que

$$\Phi_I(\vec{x}) = \left\langle \vec{p}(\vec{x}), [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \vec{B}_I(\vec{x}) \right\rangle. \tag{C.15}$$

A função  $\Phi_I(\vec{x})$  é a função global de forma definida na partícula  $\vec{x}_I$ .

Note que a derivação da função global de forma requer a determinação da matriz  $[\mathbf{A}(\vec{x})]$  e de sua inversa. No caso particular de problemas 2D, em que  $\vec{p}(\vec{x})^T = \{1, x, y\}$ , tem-se  $m = 3$  e  $[\mathbf{A}(\vec{x})]_{m \times m}$ . Portanto,

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] = \sum_{I=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] \tag{C.16}$$

em que

$$\vec{p}(\vec{x}_I)^T = \{1, x_I, y_I\} \tag{C.17}$$

daí,

$$[\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] = \begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ x_I & x_I^2 & x_I y_I \\ y_I & x_I y_I & y_I^2 \end{bmatrix}. \tag{C.18}$$

Da definição de  $[\mathbf{A}(\vec{x})]$  pode-se verificar que ela é igual à sua simétrica. Para se calcular uma expressão analítica para a inversa de  $[\mathbf{A}(\vec{x})]$ , pode-se aplicar o seguinte teorema:

$$[\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{A}(\vec{x})]} [\text{cof}[\mathbf{A}(\vec{x})]]^T. \tag{C.19}$$

Consequentemente, para uma matriz simétrica genérica da forma

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \tag{C.20}$$

tem-se que

$$\det[\mathbf{A}] = (adf + 2bec) - (c^2d + e^2a + b^2f) \quad (\text{C.21})$$

e

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]} \begin{bmatrix} df - e^2 & -bf + ec & be - cd \\ af - c^2 & -ae + cb & ad - b^2 \\ \text{sym} & & \end{bmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

### C.1.2 Gradiente das funções de interpolação

O objetivo aqui é determinar as derivadas parciais de  $\Phi_I(\vec{x})$  com respeito às coordenadas  $x_i$ , em que identifica-se:  $x_1 = x$  e  $x_2 = y$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_j} = & \left\{ \left\langle \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j}, [\mathbf{A}(\vec{x})]_I^{-1} \vec{B}(\vec{x}) \right\rangle \right. \\ & + \left\langle \vec{p}(\vec{x}), \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \right] \vec{B}_I(\vec{x}) \right\rangle \\ & \left. + \left\langle \vec{p}(\vec{x}), [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \vec{B}_I(\vec{x}) \right\} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Agora,

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} = [I] \quad (\text{C.24})$$

daí,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})] \right] [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} + [\mathbf{A}(\vec{x})] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \right] = [0] \quad (\text{C.25})$$

ou seja,

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \right] = - \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})] \right] [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \quad (\text{C.26})$$

isto é,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \right] = - [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})] \right] [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1}. \quad (\text{C.27})$$



Substituindo (C.27) em (C.23), obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I(\vec{x})}{\partial x_j} = & \left\{ \left\langle \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j}, [\mathbf{A}(\vec{x})]_I^{-1} \vec{B}(\vec{x}) \right\rangle \right. \\ & - \left\langle \vec{p}(\vec{x}), \left[ [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})] \right] [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \right] \vec{B}_I(\vec{x}) \right\rangle \\ & \left. + \left\langle \vec{p}(\vec{x}), [\mathbf{A}(\vec{x})]^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \vec{B}_I(\vec{x}) \right\} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Agora, falta calcular  $\frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \vec{B}_I(\vec{x}) \right\}$  e  $\frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]$ .

• Determinação de  $\frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{p}(\vec{x})}{\partial x_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

• Determinação de  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \vec{B}_I(\vec{x}) \right\}$ . Como

$$\vec{B}_I(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) \vec{p}(\vec{x}_I) \quad (\text{C.30})$$

tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \vec{B}_I(\vec{x}) \right\} = \frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I)}{\partial x_j} \vec{p}(\vec{x}_I) \quad (\text{C.31})$$

• Determinação de  $\frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})]$ . Como

$$[\mathbf{A}(\vec{x})] = \sum_{I=1}^n \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)] \quad (\text{C.32})$$

tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{A}(\vec{x})] = \sum_{I=1}^n \frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I)}{\partial x_j} [\vec{p}(\vec{x}_I) \otimes \vec{p}(\vec{x}_I)]. \quad (\text{C.33})$$

Consequentemente, falta calcular  $\frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I)}{\partial x_j}$ .

• Determinação de  $\frac{\partial \varphi(\vec{x} - \vec{x}_I)}{\partial x_j}$ , que desempenham um importante papel na

performance deste método. Elas devem ser construídas de forma tal que:

(i) Sejam positivas

(ii) Gerem uma única solução  $\vec{a}(\vec{x})$

(iii) Sejam grandes para  $\vec{x}_I$  próximo de  $\vec{x}$  e relativamente pequenas à medida estejam mais distante de  $\vec{x}_I$ , ou seja, elas deveriam decrescer em magnitude conforme a distância de  $\vec{x}$  a  $\vec{x}_I$  aumenta. Entretanto, usa-se funções peso que dependem somente da distância entre dois pontos, conforme se segue:

$$\varphi(\vec{x} - \vec{x}_I) = \varphi(d_I) \quad (\text{C.34})$$

em que

$$d_I = \|\vec{x} - \vec{x}_I\|. \quad (\text{C.35})$$

Mais especificamente, considera-se as funções peso da forma:

$$\varphi(d_I(\vec{x})) = \varphi(\bar{d}_I(\vec{x})) \quad (\text{C.36})$$

sendo

$$\bar{d}_I(\vec{x}) = \frac{d_I}{d_{I\max}} \equiv \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_I\|}{s \cdot r_{I\max}}$$

em que  $d_{I\max} \equiv s \cdot r_{I\max}$  é um tamanho dado do suporte de  $\varphi(d_I(\vec{x}))$  em  $\vec{x}_I$ .

A derivada  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$  é dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(\bar{d}_I)}{\partial \bar{d}_I} \frac{\partial \bar{d}_I}{\partial x_j} \quad (\text{C.37})$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{d}_I}{\partial x_j} &= \frac{1}{d_I} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_I)_j}{d_{I\max}} \\ &= \frac{1}{d_I} \frac{\langle (\vec{x} - \vec{x}_I), \vec{e}_j \rangle}{d_{I\max}}. \end{aligned}$$